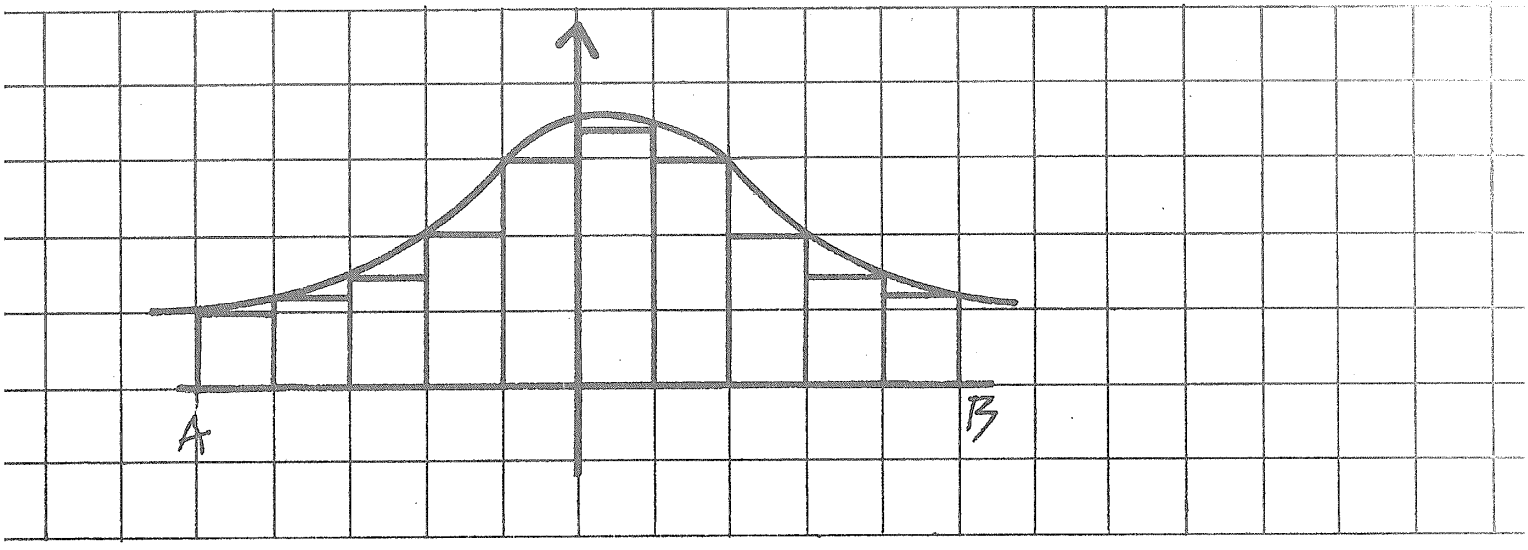
SUMATORIA Y NOTACIÓN SIGMA

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1. ***Sumatoria y notación sigma***
2. La integral definida y la integral indefinida
3. Integrales elementales
4. Métodos de integración 1
5. Métodos de integración 2
6. Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 1

SUMATORIA Y NOTACIÓN SIGMA

Conrado Flores García

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
SUMATORIA Y NOTACIÓN SIGMA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1432-6

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 Área bajo una curva

1.2 Propiedades de las sumatorias

1.3 Método de agotamiento para cálculo de áreas

1.4 Método de agotamiento para el cálculo de áreas

1.5 Método de agotamiento para cálculo de volúmenes

1.6 Método de agotamiento utilizado particiones irregulares

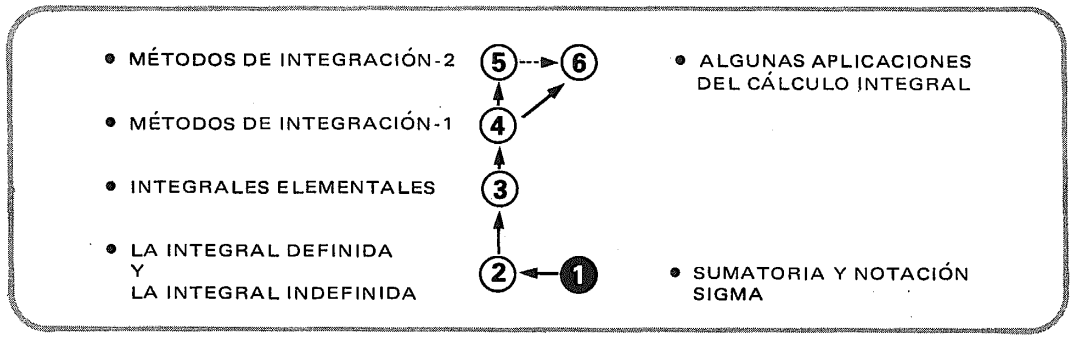
1.7 Suma de Riemann

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 1. Sumatoria y notación sigma

Objetivos: determinar el área de una figura plana o el volumen de un cuerpo geométrico, utilizando el "método de agotamiento"

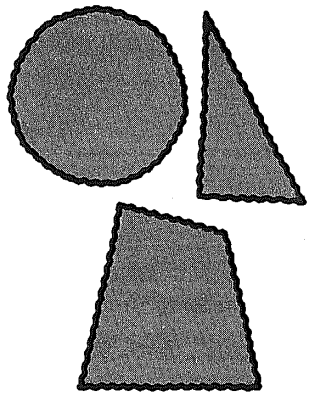
Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Continuidad y límite de una función	7	2, 3

1.1

Área bajo una curva

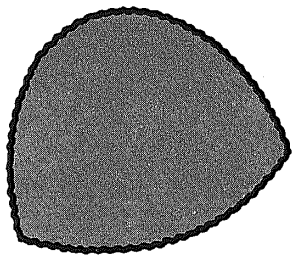
1

En el curso de
geometría
hemos aprendido
a calcular
el **área de regiones poligonales**
y **circulares.**



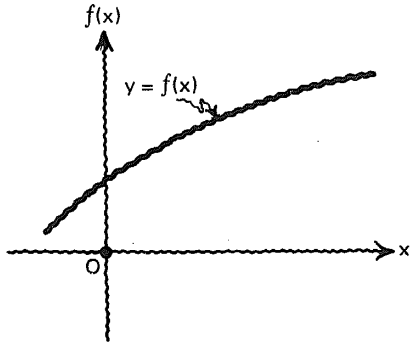
2

Ahora,
vamos a abordar
el problema de
obtención del **área**
de una región plana
limitada por una
curva cerrada simple
cualquiera.



3

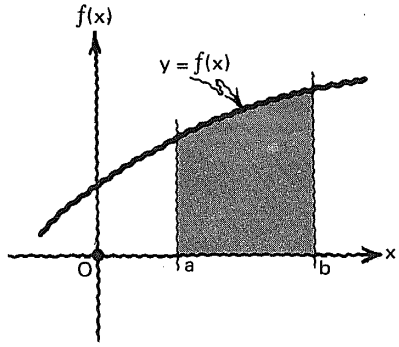
Empezaremos
por considerar
la curva representativa
de una cierta función f.



4

Queremos conocer
el área
limitada por:

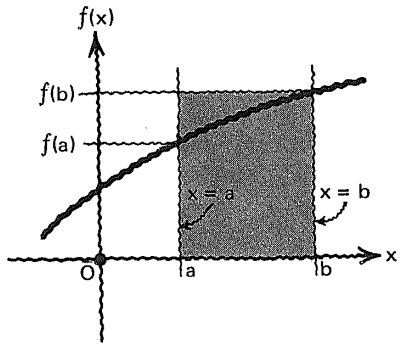
- las rectas x = a y x = b,
- el eje ox, y
- la curva f.



5

Una primera aproximación
bastante burda,
del área,
la podemos obtener
calculando el
área de la región
rectangular sombreada,
que es igual a

S (1) = ⌊_____⌋



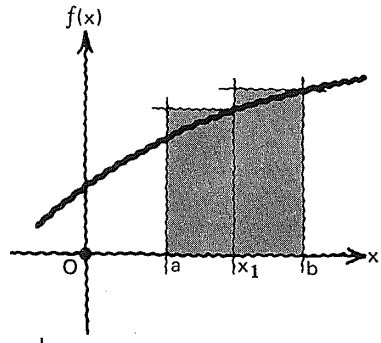
(b − a) · f (b)

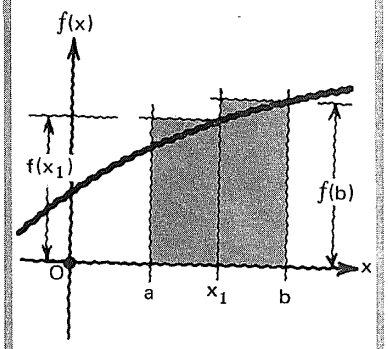
6

Si consideramos dos regiones rectangulares en vez de una, obtenemos **una mejor aproximación** del área buscada.

Así

S (2) = ____





$(x_1 - a) \cdot f(x_1) + (b - x_1) \cdot f(b)$

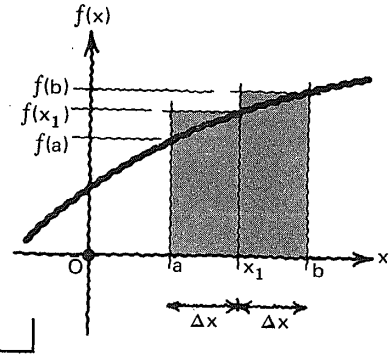
7

Si los dos **subintervalos** en que dividimos el intervalo [a,b] tienen la misma longitud, es decir,

$\Delta x = (x_1 - a) = (b - x_1)$

podemos escribir:

S (2) = ____



$f(x_1) \cdot \Delta x + f(b) \cdot \Delta x$

↓

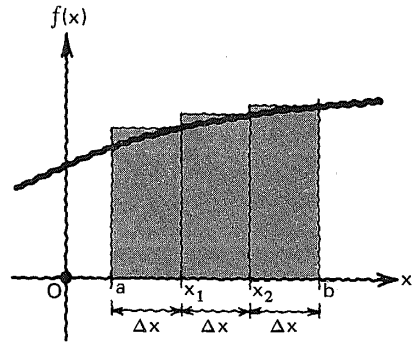
$[f(x_1) + f(b)] \cdot \Delta x$

8

A medida que el número de regiones rectangulares aumenta, la diferencia entre la suma de sus áreas y lo que podemos considerar como **área bajo la curva** f, disminuye.

Tenemos, por ejemplo, que:

S(3) = ____



$[f(x_1) + f(x_2) + f(b)] \cdot \Delta x$

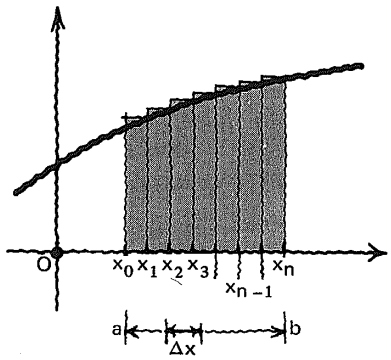
9

Consideremos
n rectángulos.

El intervalo [a,b]
ha sido dividido en
n subintervalos
de igual longitud (Δx).

De modo que:

$S(n) =$ [ ]

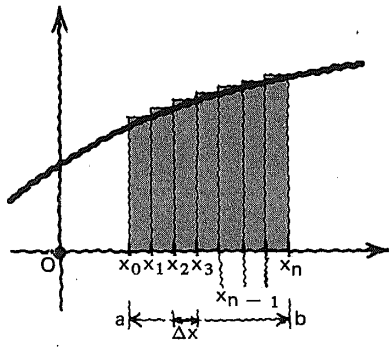


$[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \cdot \Delta x$

10

Atención.

En forma intuitiva,
podemos observar que:
cuando el número (n) de
rectángulos
tiende a infinito,
la suma de sus áreas
tiende a un límite,
que es el área (S) buscada.



- Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \cdot \Delta x$

- Área bajo la curva f, limitada lateralmente por las rectas $x = x_0$ y $x = x_n$ $S =$ [ ]

$\lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \cdot \Delta x$

11

Observemos con atención estas expresiones.

$S(n) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x$

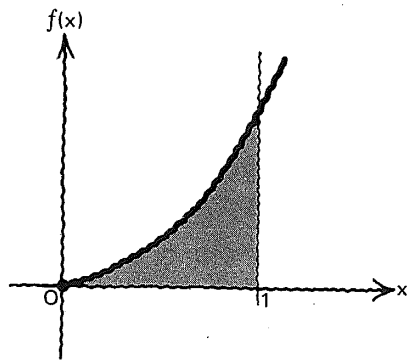
$\mathbf{S = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x}$

12

Intentaremos aplicar el procedimiento bosquejado a un caso particular.

13

Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^2$ y acotada por las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

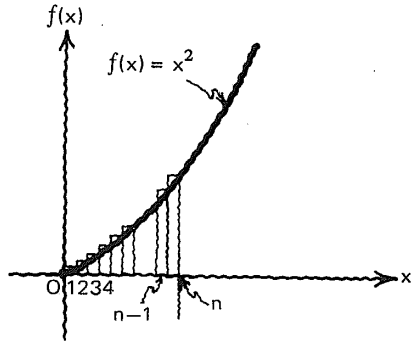


14

Consideremos el intervalo [0,1] dividido en **n** subintervalos de longitud

$\Delta x =$ ⌊___⌋

y los n rectángulos "circunscritos" en la curva f.

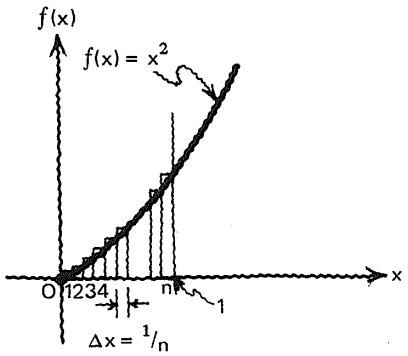


$\frac{1}{n}$

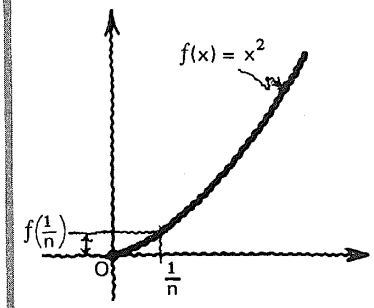
15

Atención.

El rectángulo 1 tiene una base igual a $\frac{1}{n}$ y una altura igual a

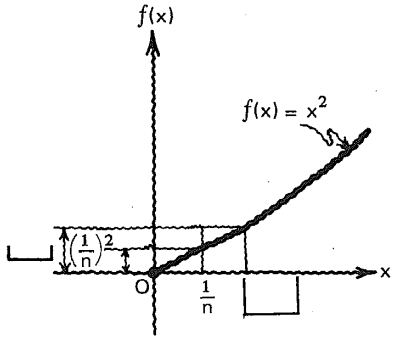


Observar con atención.



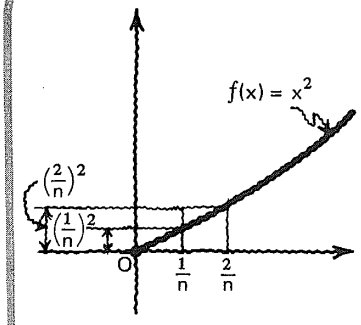
- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

16



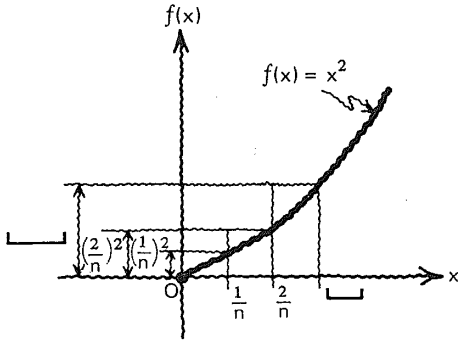
La base del 2º rectángulo es igual a

Su altura es igual a



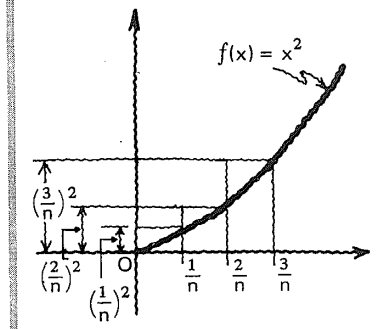
- $\frac{1}{n}$
- $f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2$

17



Base del 3er rectángulo

Altura del 3er rectángulo

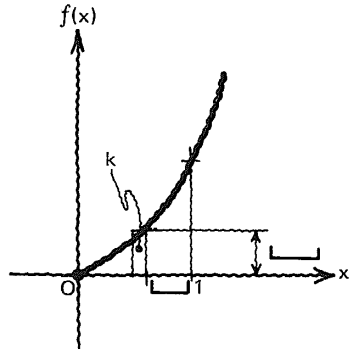


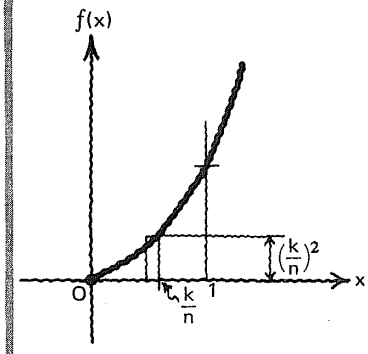
- $\frac{1}{n}$
- $f\left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^2$

18

Base del k - ésimo rectángulo

Altura del k - ésimo rectángulo



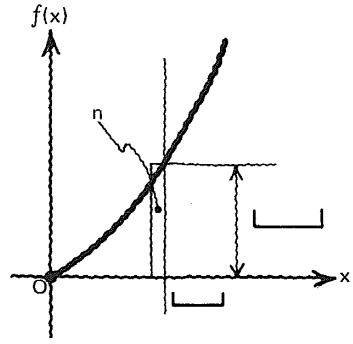


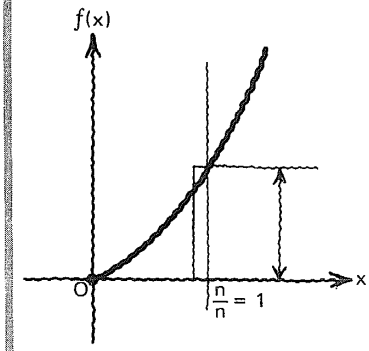
- $\frac{1}{n}$
- $f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$

19

Base del n-ésimo rectángulo

Altura del n-ésimo rectángulo



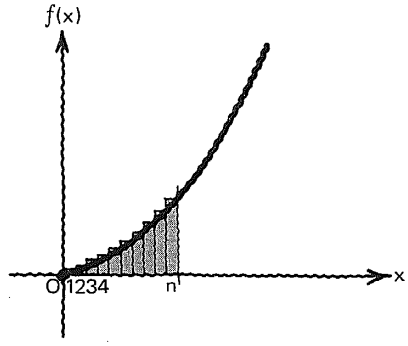


- $\frac{1}{n}$
- $f\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$ [ó $1^2 = 1$]

20

La suma de las áreas de los n rectángulos puede quedar expresada así:

S (n) =



Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

o bien:

$$\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{n}$$

o bien:

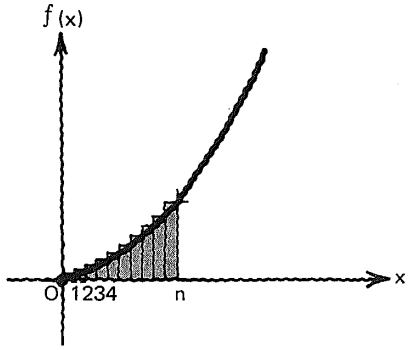
$$\left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \ldots + \frac{k^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}\right] \cdot \frac{1}{n}$$

o bien:

$$\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2\right] \frac{1}{n^3}$$

21

$$\mathbf{S\,(n) = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2]\,\frac{1}{n^3}}$$



Para evaluar S (n)
es necesario conocer:
la **suma de los cuadrados**
de los primeros n números enteros positivos.

22

Estudiaremos,
a continuación,
la forma de evaluar
algunas **sumas** que resultan
al aplicar el procedimiento anterior,
así como su expresión
en forma más compacta.

8.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *describir* el procedimiento de agotamiento para determinar el área limitada por dos rectas paralelas al eje oy, el eje ox y la curva correspondiente a una función dada, que es no negativa para cualquier número del intervalo considerado.

1.2

Propiedades de las sumatorias

23

Concentremos nuestra atención en expresiones como éstas:

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$
- $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n\text{-}1) + n$
- $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)$

24

Vamos a estudiar, en primer lugar, una manera de escribir esas sumas en una forma más compacta.

25

Estudiar con atención.

La suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n$$

puede ser escrita así:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

y leída así:

"la sumatoria de todas las íes de i = 1 a i = n".

26

La suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

quedaría expresada en esta forma:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

27

La suma:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)$$

tomaría este aspecto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

28

Entonces,
si nos encontramos con
una expresión como ésta:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

deberemos interpretarla así:

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n-1) + f(n)$

29

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{5} i = \quad = \quad$$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

30

$$\sum_{i=0}^{6} i^2 =$$

$$= \quad$$

$$= \quad$$

$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

$0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$

91

31

$$\sum_{i=10}^{15} i + 2 = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $(10 + 2) + (11 + 2) + (12 + 2) + (13 + 2) + (14 + 2) + (15 + 2)$
- $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17$
- 87

32

$$\sum_{i=0}^{10} 1 + i^2 = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $(1 + 0^2) + (1 + 1^2) + (1 + 2^2) + (1 + 3^2) + (1 + 4^2) + (1 + 5^2) + (1 + 6^2) + (1 + 7^2) + (1 + 8^2) + (1 + 9^2) + (1 + 10^2)$
- $(1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 4) + (1 + 9) + (1 + 16) + (1 + 25) + (1 + 36) + (1 + 49) + (1 + 64) + (1 + 81) + (1 + 100)$
- $1 + 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65 + 82 + 101$
- 396

33

$$\sum_{i=5}^{8} i^3 + 3i^2 - 10 = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $(5^3 + 3 \cdot 5^2 - 10) + (6^3 + 3 \cdot 6^2 - 10) + (7^3 + 3 \cdot 7^2 - 10) + (8^3 + 3 \cdot 8^2 - 10)$
- $(125 + 75 - 10) + (216 + 108 - 10) + (343 + 147 - 10) + (512 + 192 - 10)$
- $190 + 314 + 480 + 694$
- 1678

34

$$\sum_{i=1}^{10} f(i) = \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$$

- $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$

8.1.2.1

Práctica adicional de evaluación de expresiones de la forma

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

si se considera necesario.

8.1.2.2

Práctica de escritura de sumas aritméticas haciendo uso de la notación sigma, si se considera necesario.

35

Estudiar con atención.

La **notación sigma**.

$m, n \in \mathbb{Z}$
$m \leqslant n$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

- **límite superior**
- letra griega **sigma** equivale a nuestra **s** e indica **suma**
- **límite inferior**
- **índice** de la suma (puede usarse cualquier otra letra, por ejemplo: j o k)

36

$$\sum_{k=1}^{10} 5 = \_\_\_\_\_$$

$$= \_\_\_\_\_$$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

$10 \times 5 = 50$

37

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = \_\_\_\_\_$$

$$= \_\_\_\_\_$$

$1+1+1+1+1$

$5 \times 1 = 5$

38

$$\sum_{k=1}^{6} c = \square$$

$$= \square$$

$c + c + c + c + c + c$

$6c$

39

Y en general:

$$\sum_{k=1}^{n} c = \square$$

$$= \square$$

$\underbrace{c + c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ veces}}$

$n \cdot c$

40

Propiedad 1

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

c es una constante cualquiera.

41

Ahora, atención:

$$\sum_{k=0}^{5} 2 = \square$$

$$= \square$$

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

$6 \times 2 = 12$

42

$$\sum_{k=0}^{10} c = \square$$

$$= \square$$

$c + c + c + c + c + c + c + c + c + c + c$

$11c$

43

En general:

$$\sum_{k=0}^{n} c = \square$$

$$= \square$$

$\underbrace{c + c + c + c + \ldots + c}_{n + 1 \text{ veces}}$

$(n + 1)c$

44

Propiedad 2

$$\sum_{k=0}^{n} c = (n + 1)c$$

c es una constante.

45

Por ejemplo:

$\sum_{k=0}^{n} 1 =$ ⌊_____⌋

$\sum_{k=1}^{n} 1 =$ ⌊___⌋

$n + 1$

n

46

Ahora:

$\sum_{k=1}^{5} 4k =$ ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

Observar con atención.

$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5$

$4(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

$4 \times 15 = 60$

47

$$\sum_{k=1}^{4} cf(k) = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $cf(1) + cf(2) + cf(3) + cf(4)$
- $c[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$

o bien

- $c\sum_{k=1}^{4} f(k)$

48

En general:

$$\sum_{k=1}^{n} cf(k) = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $cf(1) + cf(2) + cf(3) + cf(4) + \ldots + cf(n)$
- $c[f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n)]$
- $c\sum_{k=1}^{n} f(k)$

49

Propiedad 3

$$\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

c es una constante.

50

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 - 3k = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $(1^2 - 3 \cdot 1) + (2^2 - 3 \cdot 2) + (3^2 - 3 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + (5^2 - 3 \cdot 5)$
- $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5)$
- $55 - 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
- $55 - 15 \times 3 = 55 - 45 = 10$

51

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) + g(k) = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $[f(1) + g(1)] + [f(2) + g(2)] + [f(3) + g(3)] + \ldots + [f(n) + g(n)]$
- $[f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)] + [g(1) + g(2) + g(3) + \ldots + g(n)]$
- $\sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$

52

Propiedad 4

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

53

$$\sum_{k=1}^{4} k - (k-1) = \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

- $(1-0) + (2-1) + (3-2) + (4-3)$
- $(1+2+3+4) - (0+1+2+3)$
- $10 - 6 = 4$

54

Observar con atención.

$$\sum_{k=1}^{4} k - (k-1) = (1-0) + (2-1) + (3-2) + (4-3)$$

$1 - 0$
$2 - 1$
$3 - 2$
$4 - 3$

$4 - 0 = 4$

55

Utilizando la idea del cuadro anterior:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 - (k-1)^2 = \square$$

$\square = \square$

- $(1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + (5^2 - 4^2)$

$1^2 - 0^2$
$2^2 - 1^2$
$3^2 - 2^2$
$4^2 - 3^2$
$5^2 - 4^2$

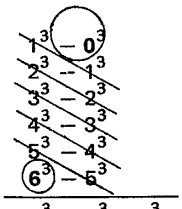
- $5^2 - 0^2 = 25$

56

$$\sum_{k=1}^{6} k^3 - (k-1)^3 = \square$$

$\square = \square$

- $(1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + (5^3 - 4^3) + (6^3 - 5^3)$

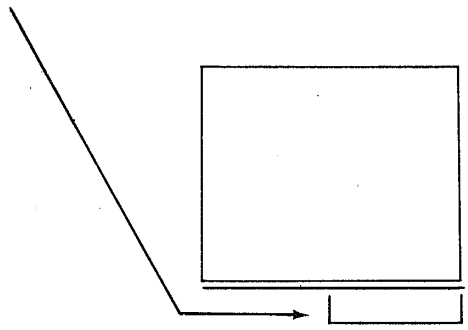


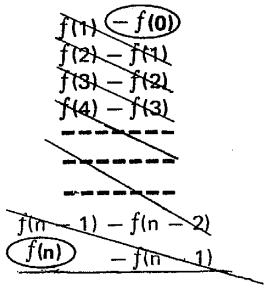
- $6^3 - 0^3 = 6^3 = \mathbf{216}$

57

Generalizando:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k-1) = \square$$





$f(n) - f(0)$

58

Propiedad 5

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k-1) = f(n) - f(0)$$

59

Resumen. Propiedades de las sumatorias.

1. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$
2. $\sum_{k=0}^{n} c = (n + 1)c$
3. $\sum_{k=1}^{n} c\,f(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$
4. $\sum_{k=1}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$
5. $\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k-1) = f(n) - f(0)$

60

Evaluar con el auxilio de las propiedades estudiadas.

$\sum_{k=1}^{100} 1 =$ _____

$100 \times 1 = 100$

61

$\sum_{k=0}^{1000} 1 =$ _____

$1001 \times 1 = 1001$

62

$$\sum_{k=1}^{500} 2 = \underline{\qquad\qquad}$$

$500 \times 2 = 1000$

63

$$\sum_{k=0}^{200} -5 = \underline{\qquad\qquad}$$

$201 \cdot (-5) = -1005$

64

$$\sum_{k=1}^{350} -1 = \underline{\qquad\qquad}$$

$350 \cdot (-1) = -350$

65

$$\sum_{k=0}^{800} a = \boxed{}$$

a es una constante

801a

66

$$\sum_{k=1}^{100} 3k = 3\sum_{k=1}^{100} k$$ por la propiedad 3

La sumatoria $\sum_{k=1}^{100} k$ representa

la suma de los primeros cien enteros positivos.

67

Veamos si es posible obtener
una expresión sencilla para
determinar en forma rápida
la suma de los primeros n enteros positivos.

Es decir: $\sum_{k=1}^{n} k = ?$

68

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

Partamos de la evaluación de la suma:

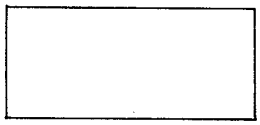
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = \square$$

↖ por la propiedad 5

n^2

69

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = n^2$$



$$\sum_{k=1}^{n} \square = n^2$$

↖ expresión simplificada

$k^2 - (k^2 - 2k + 1)$

$k^2 - k^2 + 2k - 1$

$2k - 1$

70

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

Por las propiedades 3 y 4, aplicadas al primer miembro:

$$\square = n^2$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (-1)$$

71

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (-1) = n^2$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k + \boxed{\qquad\qquad} = n^2$$

$n(-1) = -n$

72

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k + (-n) = n^2$$

o bien

$$2\sum_{k=1}^{n} k - n = n^2$$

De donde:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{n^2 + n}{2}$$

o bien

$$\bullet\ \frac{n(n+1)}{2}$$

73

Suma de los primeros n enteros positivos

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tomemos nota de esta importante identidad.

74

Estamos capacitados para evaluar en forma rápida la suma:

$$\sum_{k=1}^{100} 3k = 3\sum_{k=1}^{100} k = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\frac{3 \times 100 \times 101}{2} = 15\,150$$

75

Busquemos, ahora, una expresión para $\sum_{k=1}^{n} k^2$

a partir de:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3$$

76

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = \boxed{\quad}$$

↑ por la propiedad 5

n^3

77

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = n^3$$

Transformando:

$$\sum_{k=1}^{n} \boxed{\qquad\qquad} = n^3$$

$k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)$

$k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1$

$3k^2 - 3k + 1$

78

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = n^3$$

Por las propiedades 3 y 4:

$$\boxed{\qquad\qquad} = n^3$$

$3 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

79

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3$$

Evaluando:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad} = n^3$$

- $\frac{3n(n+1)}{2}$
- n

80

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3$$

Resolviendo para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ y simplificando:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \square$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2}}{3}$$

$$= \frac{2n^3 - 2n + 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 - 2n + 3n^2 + 3n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$\bullet \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

81

Suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

82

Utilizando la misma idea, vamos a buscar una expresión para la **suma de los cubos de los primeros n enteros positivos.**

83

Expresión de partida: $\sum_{k=1}^{n} k^4 - (k-1)^4 = n^4$

Transformaciones:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 - (k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1) = n^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cancel{k^4} - \cancel{k^4} + 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1 = n^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1 = n^4$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n^4$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 4\,\frac{n(n+1)}{2} - n = n^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{2n(n+1) + n}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

84

Suma de los cubos de los primeros n enteros positivos

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

85

De manera análoga
podemos calcular

la suma de las cuartas potencias
de los primeros n enteros positivos...

etcétera.

86

Resumen. 4 identidades sumatoriales.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

87

Usando las propiedades e identidades estudiadas, calcular las siguientes sumas.

$\sum_{k=1}^{25} 3k + 5 = ?$

Por propiedades 3 y 4:

$\sum_{k=1}^{n} 3k + 5 =$ [ ]

Expresión en términos de n: [ ]

$\sum_{k=1}^{25} 3k + 5 =$ [ ]

$3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$

$\frac{3n(n+1)}{2} + 5n$

$\frac{3 \times 25 \times 26}{2} + 5 \times 25 = 1100$

88

Evaluar $\sum_{k=1}^{42} 2k^2 - 3$

$\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3 =$ ____

$\sum_{k=1}^{42} 2k^2 - 3 =$ ____

- $2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3$

$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n$

o bien:

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3n$

- $\frac{42 \times 43 \times 85}{3} - 3 \times 42 =$

51 044

89

Evaluar $\sum_{k=1}^{50} k(k+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) =$ ____

Expresión simplificada en términos de n: ____

$\sum_{k=1}^{50} k(k+1) =$ ____

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)[2n+1+3]}{6}$

- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- $\frac{50 \times 51 \times 52}{3} = 44\,200$

8.1.2.3

Práctica adicional de evaluación de expresiones de la forma

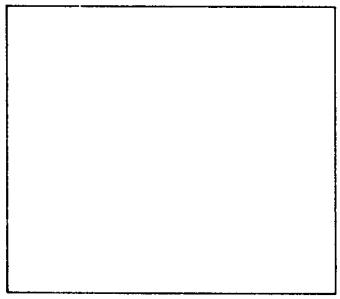
$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

haciendo uso de las propiedades e identidades estudiadas, si se considera necesario.

90

Evaluar en términos de n:

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 =$ ⌊_____⌋



Expresión simplificada: = ⌊_____⌋

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2$

$\sum_{k=1}^{n} 2k + 1$

$2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$\frac{2n(n+1)}{2} + n$

$n(n+1) + n$

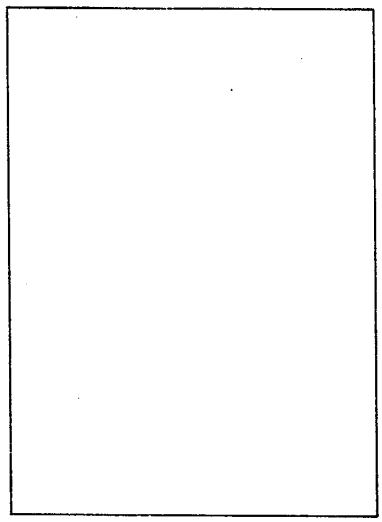
$n(n+1+1)$

- **$n(n+2)$**

91

Ahora, atención.

$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 =$ ⌊_____⌋



Expresión simplificada en términos de n: = ⌊_____⌋

- $\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2$

$\sum_{k=0}^{n} 2k + 1$

$2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

$2\sum_{k=0}^{n} k = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$

puesto que el primer término de la suma (para k=0) no influye en el resultado.

$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

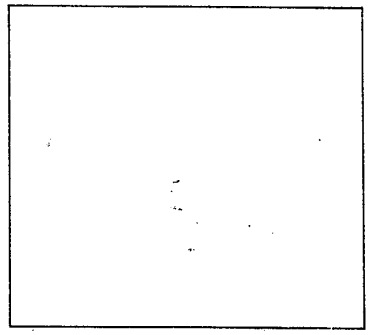
$2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) + n + 1$

$= (n+1)(n+1)$

- **$(n+1)^2$**

92

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \square$$



Expresión simplificada en términos de n: $= \square$

- $\sum_{k=0}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3$

$\sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1$

$3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

$3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1$

$(n+1)(n+1)^2$

- $(n+1)^3$

93

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = \square$$

$= \square$

$2\sum_{k=1}^{n} k$

$\frac{2n(n+1)}{2}$

$n(n+1)$

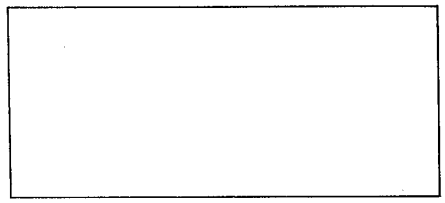
94

Suma de los primeros n enteros positivos pares

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

95

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = \square$$



Expresión simplificada en términos de n: $= \square$

$$2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\frac{2n(n+1)}{2} - n$$

$$n(n+1) - n$$

$$n(n+1-1)$$

- n^2

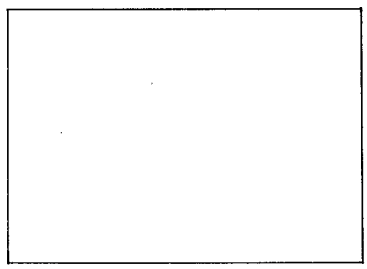
96

Suma de los primeros n enteros positivos impares

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

97

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \square$$



Expresión simplificada en términos de n: $= \square$

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^2 - 4k + 1 =$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n$$

- $\frac{n}{3}(4n^2 - 1)$

98

Suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos impares

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$

99

En forma similar,
podemos deducir expresiones
para la

suma de los cubos de los n primeros enteros positivos impares...

etcétera

100

Resumen. 3 identidades sumatoriales

1. Suma de los primeros n enteros positivos *pares*:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

2. Suma de los primeros n enteros positivos *impares*:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$$

3. Suma de los *cuadrados* de los primeros n enteros positivos *impares*:

$$\sum_{}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$

8.1.2.4

Práctica adicional de
obtención de
expresiones en términos de n
de algunas sumatorias
de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

si se considera necesario.

8.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *evaluar* expresiones de la forma

  $$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

  siendo m y n enteros y $m \leqslant n$;
- *escribir*, haciendo uso de la notación sigma,
  una suma aritmética dada;
- *evaluar* expresiones de la forma

  $$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

  haciendo uso de las propiedades
  e identidades sumatoriales;
- *obtener* expresiones en términos de n,
  de algunas sumatorias de la forma

  $$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

1.3

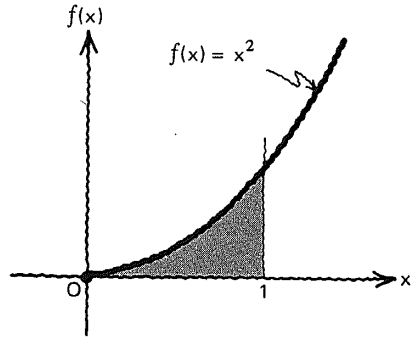
Método de agotamiento para cálculo de áreas

101

Estamos en condiciones de continuar con la solución de un problema que habíamos dejado pendiente.

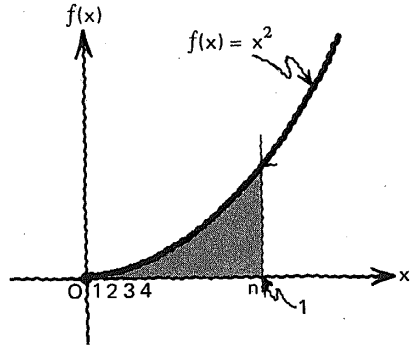
102

Intentábamos calcular el área **S** bajo la curva $f(x) = x^2$ y acotada por las rectas $x = 0$ y $x = 1$.



103

Habíamos dividido el intervalo [0, 1] en n subintervalos de igual longitud, considerados como bases de otros tantos rectángulos circunscritos en la curva.
Encontramos que:



la suma de las áreas de estos n rectángulos está dada por:

$$S(n) = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]\frac{1}{n^3}$$

104

$$S(n) = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]\frac{1}{n^3}$$

Haciendo uso de lo que ahora sabemos de las sumas aritméticas, podemos escribir esta expresión en forma más compacta, así:

$S(n) =$ ⌊_____⌋

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$ o bien: $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

105

$$S(n) = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]\frac{1}{n^3}$$

$$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Poniendo en términos de n, obtenemos:

$S(n) =$ ⌊_____⌋

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

o bien:

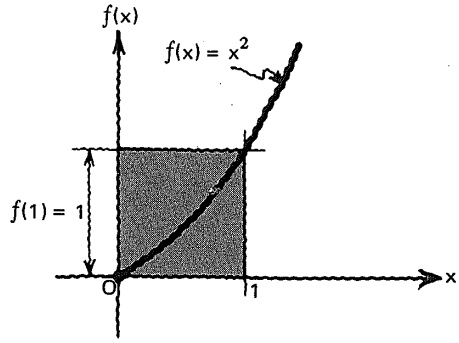
• $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

106

$$S(n) = \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n^2}$$

Por ejemplo:
para n = 1
se tiene:

S(1) = [ ]



• $\frac{2 \times 3}{6 \times 1^2} = \frac{6}{6} = 1$

En efecto: S(1) = 1 X 1 = 1

107

Completemos esta tabla.

n	S(n)
1	1
2	
4	
8	
10	
100	
1000	

$$S(n) = \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n^2}$$

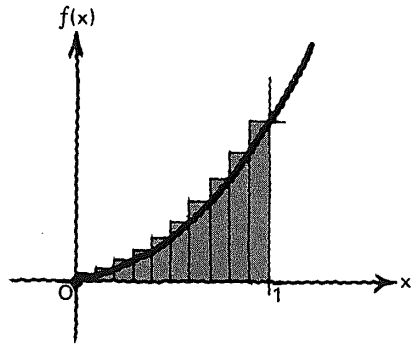
n	S(n)
1	1.00
2	0.625
4	0.46875
8	0.3984375
10	0.385
100	0.33835
1000	0.3338335

108

Observamos a través de la tabla del cuadro anterior que, a medida que el número **n** de rectángulos circunscritos aumenta la suma de sus áreas parece acercarse a un cierto límite:

[ ]

Intentemos señalarlo.



$\frac{1}{3}$

109

$$S(n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

El área (S) buscada será, entonces, este límite, si existe, es decir:

$$S = \lfloor\quad\rfloor = \lfloor\qquad\qquad\rfloor$$

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

110

$$S = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Recordemos ahora que para poder evaluar este límite, es necesario efectuar las siguientes transformaciones en la expresión dada:

$$S = \lim_{n\to+\infty} \lfloor\qquad\qquad\rfloor$$

$$\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

111

$$S = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \lfloor\quad\rfloor$$

- $\frac{1}{3}$

Puesto que: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

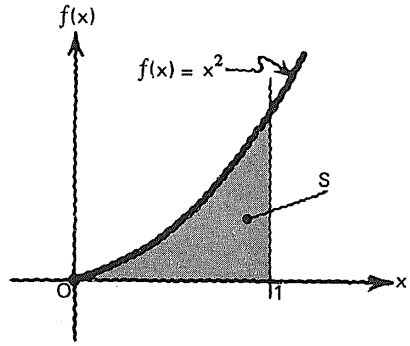
y $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$

Véase módulo 2 de cálculo diferencial

112

Entonces:

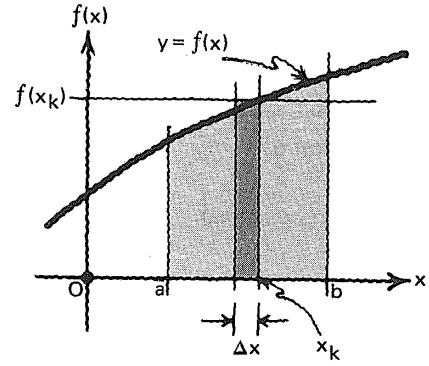
el área S, bajo la curva $f(x) = x^2$, comprendida entre las rectas (o acotada por las rectas) $x = 0$ y $x = 1$ es igual a **1/3** de unidad cuadrada.



113

Podemos, entonces, escribir, si consideramos n **rectángulos circunscritos** de base constante e igual a Δx y altura igual a $f(x_k)$, siendo x_k la abscisa del extremo derecho del k-ésimo subintervalo:

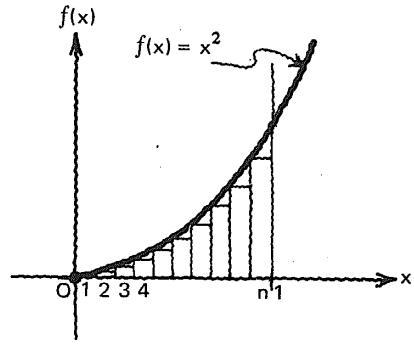
$$S = \lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$



$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

114

Ahora, intentaremos obtener el área previamente calculada, pero considerando n **rectángulos inscritos** en la curva f.

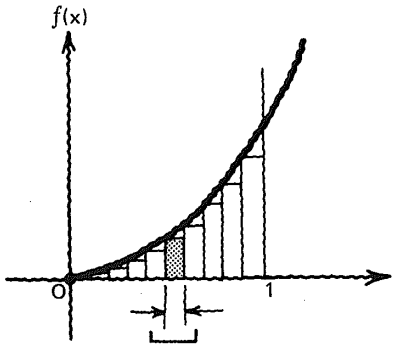


115

Tomemos el k-ésimo rectángulo

Su base es igual a:

$\Delta x =$ [ ]



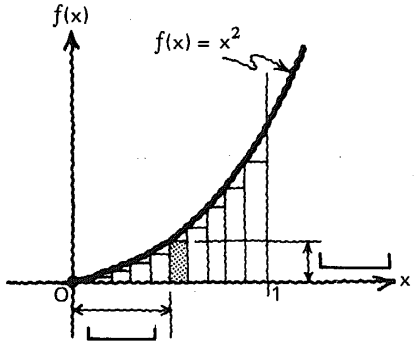
$\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}$

116

La altura del k-ésimo rectángulo es igual a:

[ ]



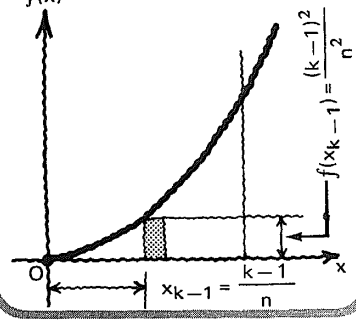
Atención.

$f(x_{k-1}) = (x_{k-1})^2$

y puesto que

$x_{k-1} = (k-1) \cdot \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n}$

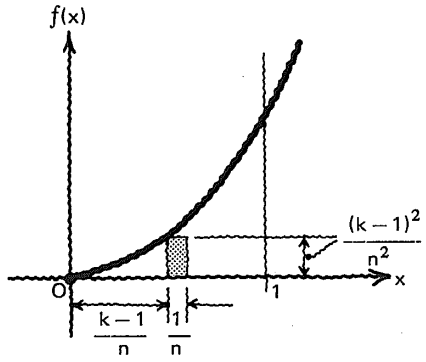
$f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$



117

El área del k-ésimo rectángulo, es, entonces:

$a_k =$ [ ]

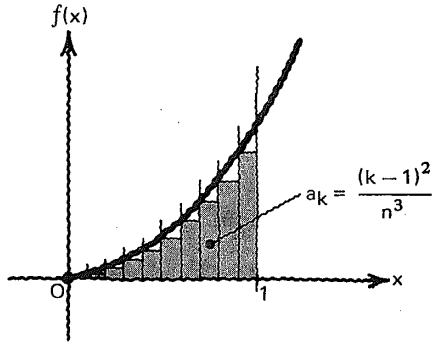


$\frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(k-1)^2}{n^3}$

118

La suma de las áreas de los n rectángulos inscritos en la curva f, quedaría expresada así:

$$\square$$



$$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

119

$$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

Busquemos una expresión en términos de n para la sumatoria del segundo miembro:

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \square$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2k + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n$$

- $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$

120

$$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

$$S(n) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}$$

El área bajo la curva f, sería:

$$S = \square = \square$$

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) \bullet \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}\right)$$

121

$$S = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \right)$$

Calculemos este límite.

$S =$ [ ]

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

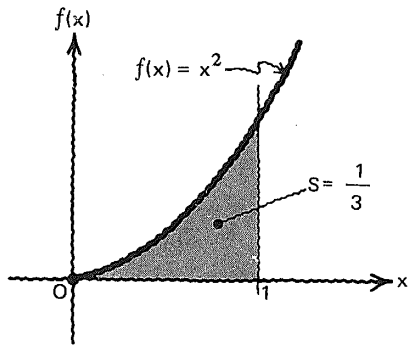
- $\frac{1}{3}$

122

Utilizando

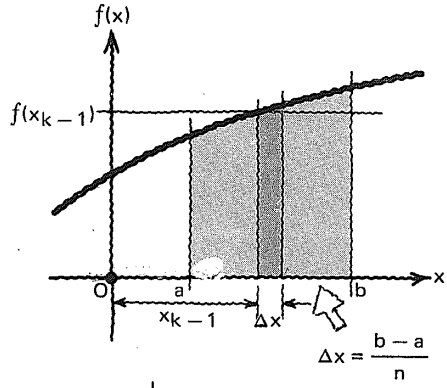
rectángulos inscritos

en la curva f hemos obtenido para el área S el mismo valor que haciendo uso de rectángulos circunscritos.



123

También, si consideramos n **rectángulos inscritos** de base constante e igual a Δx, y altura igual a $f(x_{k-1})$, siendo x_{k-1} la abscisa del extremo izquierdo del k-ésimo subintervalo:

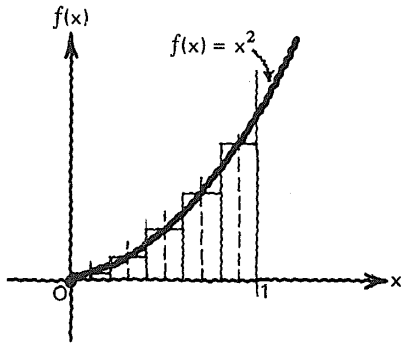


$S = \lim_{n \to +\infty} S(n) =$ [ ]

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x$$

124

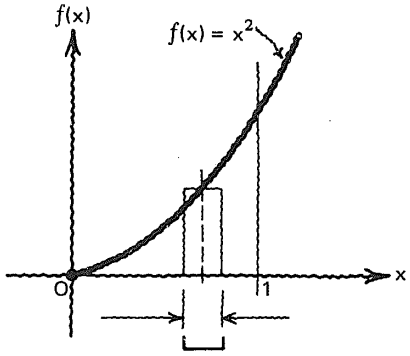
Calcularemos nuevamente el área S, considerando al intervalo [0, 1] dividido en n subintervalos de igual longitud, pero vamos a construir los n rectángulos de tal manera que la altura de cada uno de ellos sea la ordenada del punto medio de cada subintervalo.



125

La base del k-ésimo rectángulo seguirá siendo:

$\Delta x =$ ⌊ ⌋



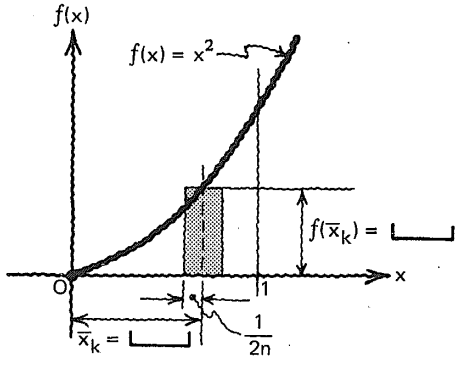
$\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}$

126

La altura del k-ésimo rectángulo será, ahora, igual a:

⌊ ⌋



$$f(\bar{x}_k) = (\bar{x}_k)^2$$

pero $\bar{x}_k = x_{k-1} + \frac{1}{2n}$

$$x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$$

entonces $\bar{x}_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n}$

$$= \frac{2(k-1)+1}{2n}$$

$$= \frac{2k-2+1}{2n}$$

$$= \frac{2k-1}{2n}$$

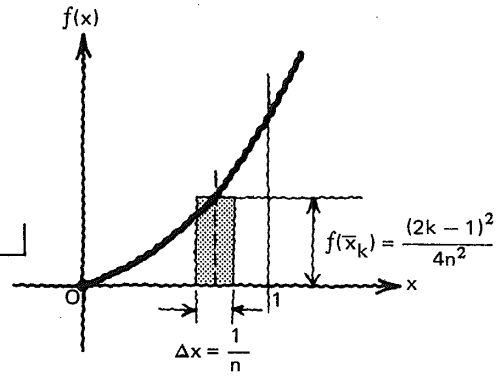
- $f(\bar{x}_k) = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2$

$$= \frac{(2k-1)^2}{4n^2}$$

127

El área del k-ésimo rectángulo, quedará expresada así:

$a_k =$ [ ]

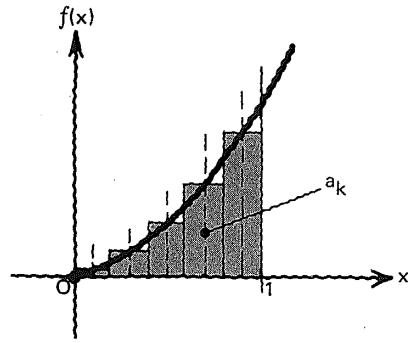


$\frac{(2k-1)^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(2k-1)^2}{4n^3}$

128

Y la suma de las áreas de los n rectángulos "interscritos"

$S(n) =$ [ ]



$\frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$

129

$$S(n) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$$

Necesitamos, ahora, encontrar una fórmula para la sumatoria del segundo miembro. Observamos que se trata de la

suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos impares

que ya hemos evaluado: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 =$ [ ]

$\frac{n}{3}(4n^2 - 1)$

130

$$S(n) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$S(n) = \frac{1}{4n^3} \cdot \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$S(n) = \frac{4n^2-1}{12n^2}$$

$S =$ [ ] $=$ [ ]

- $\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2-1}{12n^2}\right)$

131

$$S = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-1}{12n^2}$$

Calculando el límite.

$S =$ [ ]

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\right)$$

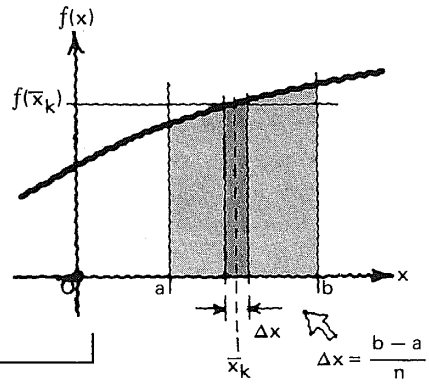
Nuevamente obtenemos:

- $\frac{1}{3}$

132

Y también:

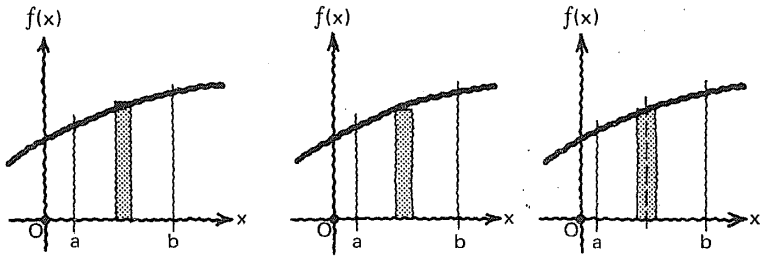
si consideramos n **rectángulos "interscritos"** de base constante e igual a Δx, y altura igual a $f(\bar{x}_k)$ siendo $\bar{x}_k$ la abscisa del punto medio del k-ésimo subintervalo:



$S = \lim_{n\to+\infty} S(n) =$ [ ]

- $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x$

133



Debemos observar que, independientemente de que los rectángulos sean circunscritos, inscritos o "interscritos", la suma de sus áreas tiende a un mismo número como límite, cuando el número de ellos (n) crece sin límite.

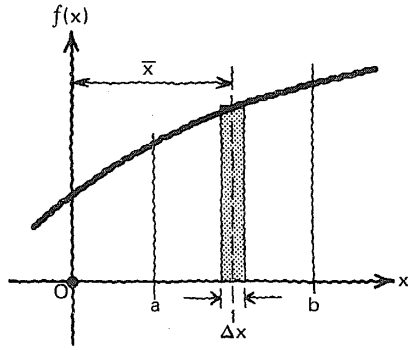
134

Debemos, también, observar que cuando $n \to +\infty$

$\Delta x \to$ [ ]

y podemos escribir:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x$$



0

8.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* cómo el "método de agotamiento" para el cálculo del área bajo una curva dada, funciona con rectángulos circunscritos, inscritos o "interscritos".

1.4

Método de agotamiento para el cálculo de áreas

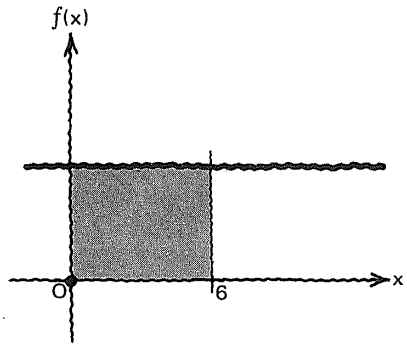
135

Vamos a aplicar el procedimiento estudiado para calcular algunas áreas.

136

Consideremos la función constante $f(x) = 5$ cuya gráfica se muestra.

Calculemos el área limitada por la curva dada, y las rectas $x = 0$, $x = 6$ y $y = 0$, aunque conozcamos de antemano su valor.



137

Consideremos n rectángulos:

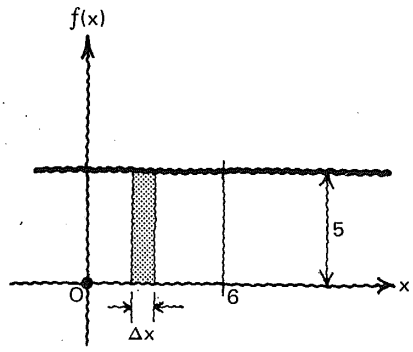
Base del k-ésimo rectángulo:

$\Delta x =$ [ ]

Altura del k-ésimo rectángulo: [ ]

Área del k-ésimo rectángulo:

$a_k =$ [ ]



- $\frac{6}{n}$
- 5
- $5 \cdot \frac{6}{n} = \frac{30}{n}$

138

$a_k = \frac{30}{n}$

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ [ ]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{30}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 30$$

$$= \frac{1}{n} \cdot 30n$$

$$= 30$$

139

$S(n) = 30$

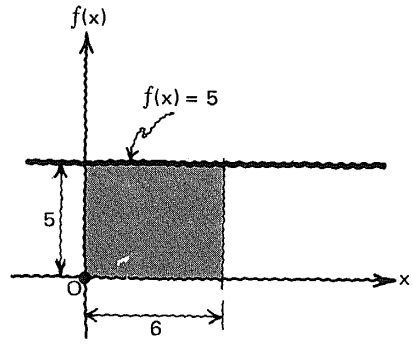
$S =$ [ ] $=$ [ ] $=$ [ ]

- $\lim_{n \to +\infty} S(n)$
- $\lim_{n \to +\infty} 30$
- 30

140

En efecto:

$S = 6 \times 5 = 30$

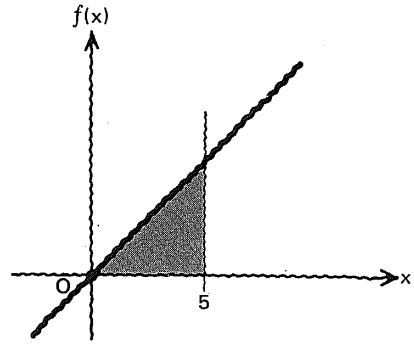


141

Sea, ahora,
la función identidad

$f(x) = x$.

Calculemos el área bajo la curva (recta) f entre $x = 0$ y $x = 5$, utilizando rectángulos circunscritos.



142

n rectángulos.

Base del k - ésimo rectángulo:

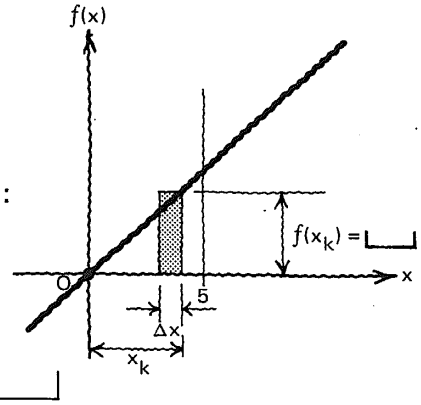
$\Delta x =$ ⌊_____⌋

Altura del k-ésimo rectángulo:

⌊_____⌋

Área del k-ésimo rectángulo:

$a_k =$ ⌊_____⌋



- $\frac{5}{n}$
- $f(x_k) = x_k = \frac{5k}{n}$
- $\frac{5}{n} \cdot \frac{5k}{n} = \frac{25k}{n^2}$

143

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ [ ]

Expresión en términos de n: [ ]

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{25k}{n^2} = \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

  $\frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{25n(n+1)}{2n^2}$

- $\frac{25(n+1)}{2n}$

144

$$S(n) = \frac{25(n+1)}{2n}$$

$S =$ [ ] $=$ [ ]

[ ]

$S =$ [ ]

- $\lim_{n \to +\infty} s(n)$ ● $\lim_{n \to +\infty} \frac{25(n+1)}{2n}$

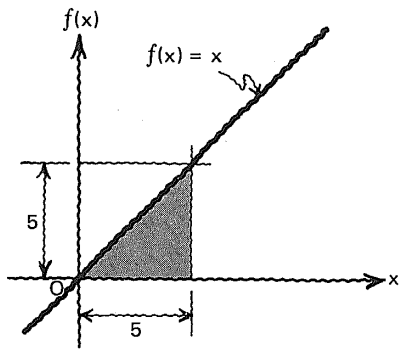
  $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{25}{2} + \frac{25}{2n} \right)$

- $\frac{25}{2}$

145

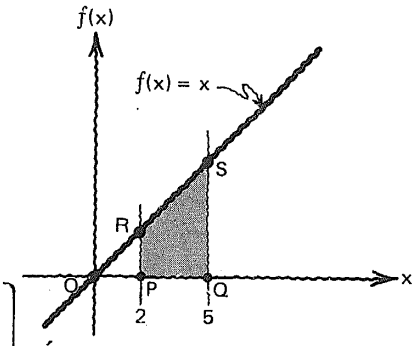
En efecto:

$$S = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$



146

Ahora, supongamos que se requiere calcular el área bajo f, acotada por las rectas $x = 2$ y $x = 5$.

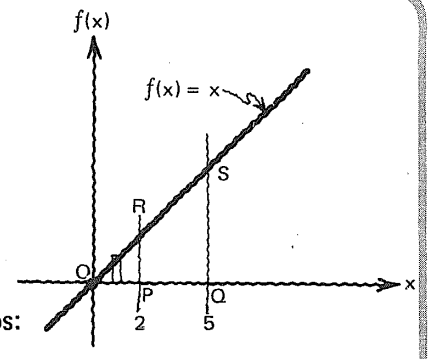


Podemos observar que el área requerida PQSR es igual a la diferencia de dos áreas que somos capaces de calcular por el procedimiento estudiado.

área PQSR = [ ]

área OQS − área OPR

147



Hemos calculado el área OQS, y es igual a 25/2.
Calculemos, ahora, el área OPR.

Para n rectángulos circunscritos:

- base del k-ésimo rectángulo = [ ]
- altura del k-ésimo rectángulo = [ ]
- área del k-ésimo rectángulo = [ ]

- $\frac{2}{n}$
- $\frac{2k}{n}$
- $\frac{2k}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4k}{n^2}$

148

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ [ ]

Expresión en términos de n:

[ ]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n^2} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

- $\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n}$

149

$$S(n) = \frac{2(n+1)}{n}$$

Área bajo la curva:

$S =$ [ ] $=$ [ ]

[ ]

$S =$ [ ]

- $\lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2(n+1)}{n}$

$= \lim_{n \to +\infty} (2 + \frac{2}{n})$

$= 2$

- **2**

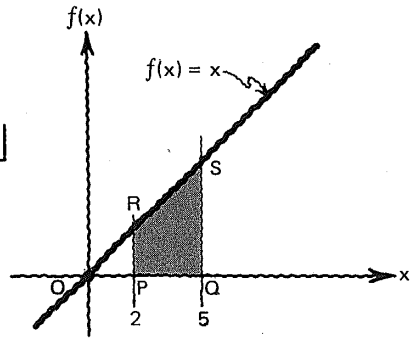
150

Entonces:

área PQSR = [ ]

Geométricamente:

área PQSR = [ ]



- $\frac{25}{2} - 2 = \frac{25-4}{2} = \frac{21}{2}$

- $\frac{(|\overleftrightarrow{PR}| + |\overleftrightarrow{QS}|)|\overleftrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{(2+5)3}{2}$

$= \frac{21}{2}$

Puesto que

$|\overleftrightarrow{PR}| = f(2) = 2$

$|\overleftrightarrow{QS}| = f(5) = 5$

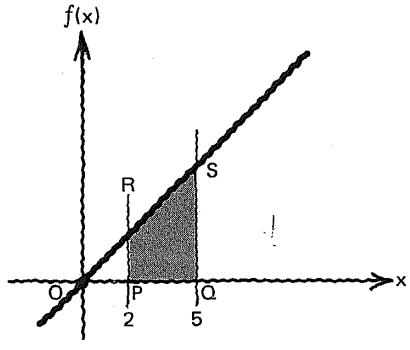
$|\overleftrightarrow{PQ}| = |\overleftrightarrow{OQ}| - |\overleftrightarrow{OP}| = 5 - 2 = 3$

151

Estudiaremos un

procedimiento alternativo

para el cálculo del área PQSR, dividiendo el intervalo [2, 5] en n subintervalos de igual longitud, y considerando n rectángulos (por ejemplo: circunscritos).



152

Base del k-ésimo rectángulo:

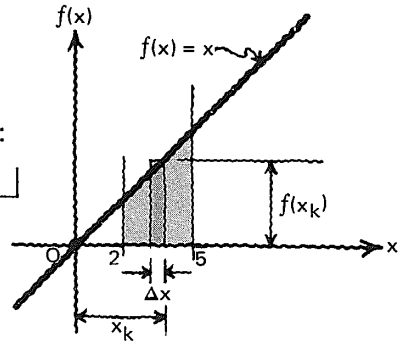
$\Delta x =$ [ ]

Altura del k - ésimo rectángulo:

$f(x_k) =$ [ ]

puesto que:

$x_k =$ [ ]

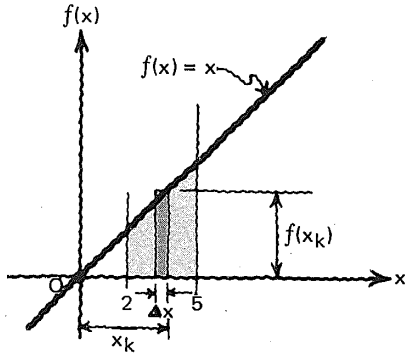


- $\frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$
- $x_k = 2 + \frac{3k}{n}$
- $2 + \frac{3k}{n}$

153

Área del k-ésimo rectángulo:

$a_k =$ [ ]

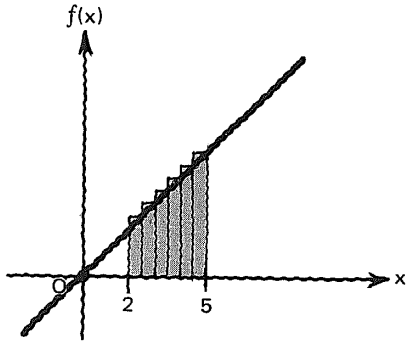


- $\left(2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$

154

Suma de las áreas de los n rectángulos:

[ ]



- $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$

155

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$

Transformaciones:

Expresión simplificada
en términos de n: _____

$\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 2 + \frac{3k}{n}$

$\frac{3}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 2 + \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right]$

$\frac{3}{n}\left[2n + \frac{3}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$\frac{3}{n}\left[2n + \frac{3(n+1)}{2}\right]$

- $S(n) = \frac{21}{2} + \frac{9}{2n}$

156

$$S(n) = \frac{21}{2} + \frac{9}{2n}$$

Área bajo la curva:

S = ____ = ____ = ____

- $\lim_{n \to +\infty} S(n)$ - $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{21}{2} + \frac{9}{2n}\right)$
- $\frac{21}{2}$

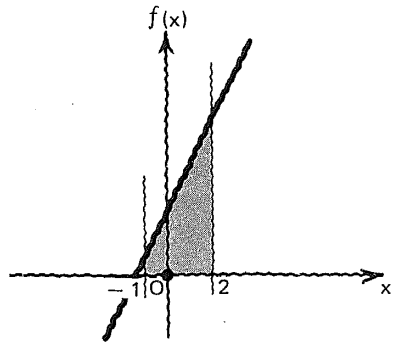
mismo resultado que
habíamos obtenido
anteriormente

157

Calcular, utilizando
rectángulos circunscritos,
el área bajo la recta

$f(x) = 2x + 3$,

acotada por las
rectas
$x = -1$ y $x = 2$.



158

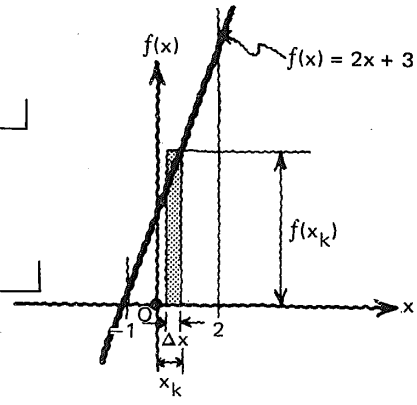
Base del k-ésimo rectángulo:

$\Delta x =$ ____

Altura del k-ésimo rectángulo:

$f(x_k) =$ ____

ya que $x_k =$ ____

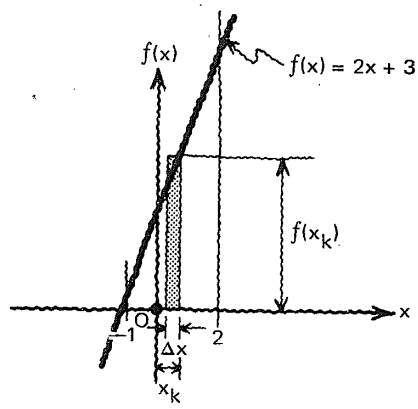


- $\dfrac{2-(-1)}{n} = \dfrac{3}{n}$
- $2\left(-1+\dfrac{3k}{n}\right)+3 = \dfrac{6k}{n}+1$
- $-1+\dfrac{3k}{n}$

159

Área del k-ésimo rectángulo:

$a_k =$ ____



- $\left(\dfrac{6k}{n}+1\right)\dfrac{3}{n}$

160

$a_k = \left(\dfrac{6k}{n}+1\right)\dfrac{3}{n}$

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ ____

Transformaciones:

Expresión simplificada en términos de n: ____

- $\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{6k}{n}+1\right)\dfrac{3}{n}$

  $\dfrac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{6k}{n}+1$

  $\dfrac{3}{n}\left[\dfrac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right]$
- $\dfrac{3}{n}\left[\dfrac{6}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+n\right]$

  $\dfrac{3}{n}[3(n+1)+n]$

  $\dfrac{3}{n}[4n+3]$
- $12+\dfrac{9}{n}$

161

$$S(n) = 12 + \frac{9}{n}$$

Área bajo la curva (recta):

S = [____] = [____] = [____]

$\lim_{n \to +\infty} S(n)$ ● $\lim_{n \to +\infty} \left(12 + \frac{9}{n}\right)$ ● **12**

162

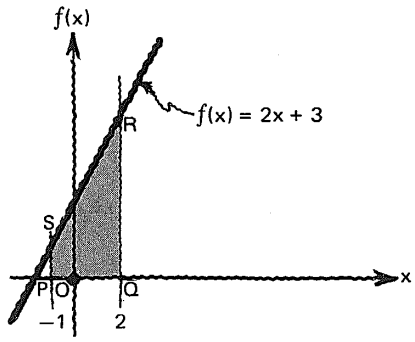
Geométricamente:

$\overrightarrow{|PS|}$ = [____] = [__]

$\overrightarrow{|QR|}$ = [____] = [__]

$\overrightarrow{|PQ|}$ = [____] = [__]

S = [____] = [__]



● $f(-1) = 1$

● $f(2) = 7$

● $2 - (-1) = 3$

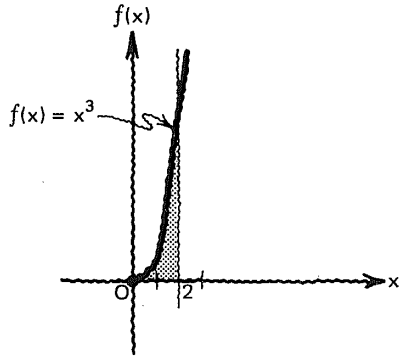
● $\frac{(\overrightarrow{|PS|} + \overrightarrow{|QR|})\overrightarrow{|PQ|}}{2} = \frac{(1 + 7)3}{2} = 12$

163

Los problemas hasta ahora resueltos nos han ayudado a ganar confianza en este método de agotamiento para cálculo de áreas.

164

Ahora, calculemos el área bajo la curva $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 2$



165

Considerando n rectángulos circunscritos:

- base del k - ésimo rectángulo: [ ]
- altura del k- ésimo rectángulo: [ ]

- $\frac{2}{n}$
- $f(x_k) = (x_k)^3 = \left(\frac{2k}{n}\right)^3$

  puesto que:

  $x_k = \frac{2k}{n}$

166

área del k-ésimo rectángulo:

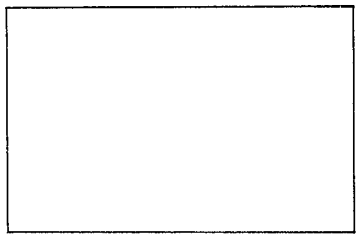
$a_k =$ [ ]

$\frac{2}{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3 = \frac{16k^3}{n^4}$

167

Suma de las áreas de los n rectángulos:

Transformaciones:



Expresión simplificada en términos de n:

$$\bullet S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{16k^3}{n^4}$$

$$= \frac{16}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{16}{n^4} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$S(n) = 4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}$$

168

área bajo la curva:

$$\lim_{n \to +\infty} s(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 4$$

8.1.4.1

Práctica adicional de
cálculo de áreas
por el método de agotamiento,
si se considera necesario.

8.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* el área bajo una curva definida por una función polinomial, utilizando el método de agotamiento.

1.5

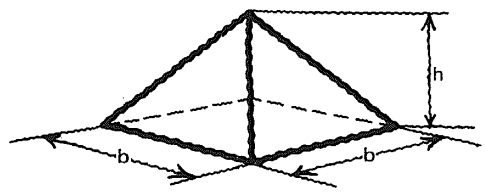
Método de agotamiento para cálculo de volúmenes

169

El procedimiento que hemos estudiado para calcular áreas, puede ser utilizado también para el **cálculo de volúmenes.**

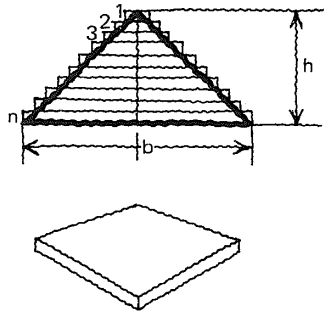
170

Intentaremos calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada, de las dimensiones indicadas.



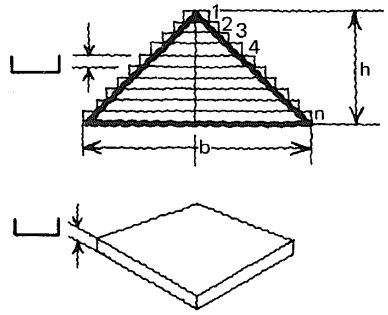
171

Consideremos **n** prismas rectos de base cuadrada, y de igual altura, circunscritos en la pirámide.



172

La altura de cada prisma deberá ser igual a

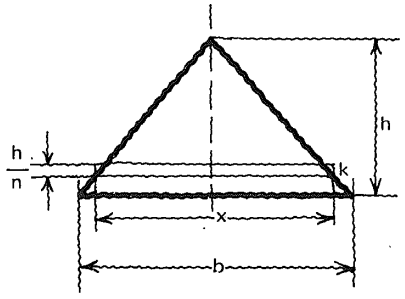


- $\frac{h}{n}$
- $\frac{h}{n}$
- $\frac{h}{n}$

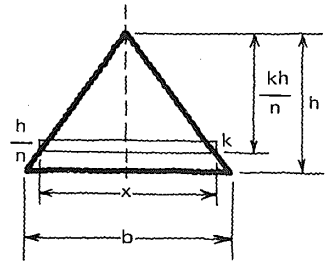
173

Atención.

Si llamamos **x** al lado de la base del k-ésimo prisma, podemos expresar esta dimensión en términos de **b** y **h.**



Intentémoslo. • x =



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{b} = \frac{\frac{kh}{n}}{h}$$

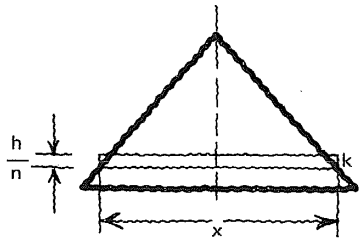
de donde:

$$x = \frac{kb}{n}$$

174

Como el lado de la base del k-ésimo prisma es igual a $\frac{kb}{n}$ y la altura es igual a $\frac{h}{n}$

su volumen v_k = ⌊_____⌋



$$\left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} = \frac{k^2 b^2 h}{n^3}$$

175

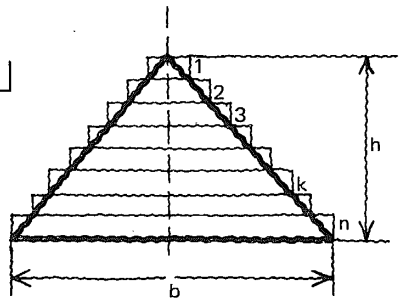
La suma de los volúmenes de los n prismas quedaría expresada así:

V(n) = ⌊_____⌋

Transformaciones:

Expresión simplificada en términos de n: ⌊_____⌋

⌊_____⌋



- $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 b^2 h}{n^3} = \frac{b^2 h}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$

$\frac{b^2 h}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\frac{b^2 h}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

- $\frac{b^2 h}{6}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$

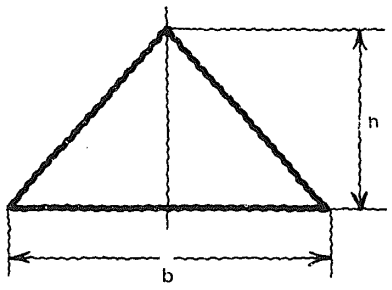
176

El volumen de la pirámide deberá ser, entonces:

V = ⌊_____⌋

= ⌊_____⌋

= ⌊_____⌋



- $\lim_{n \to +\infty} V(n)$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{b^2 h}{6}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$
- $\frac{b^2 h}{3}$

Esta es la expresión que conocemos para el volumen de una pirámide de base cuadrada.

8.1.5.1

Práctica adicional de
cálculo de volúmenes
de cuerpos geométricos
utilizando el método
de agotamiento,
si se considera necesario.

8.1.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

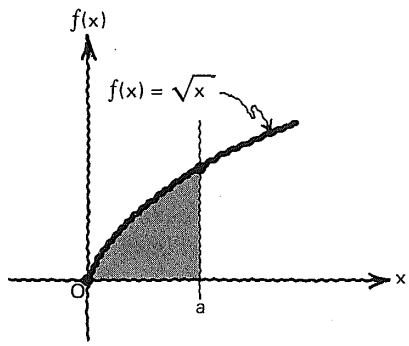
- *calcular* el volumen de un cuerpo geométrico dado, por el método de agotamiento.

1.6

Método de agotamiento utilizando particiones irregulares

177

Ahora, queremos calcular el área bajo la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y acotada por las rectas $x = 0$ y $x = a$

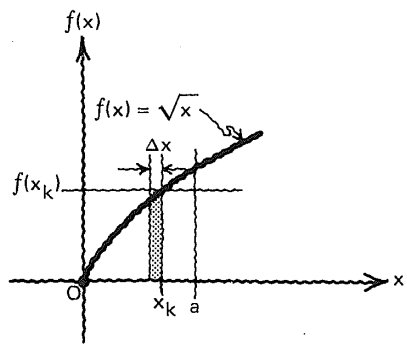


178

Consideramos n rectángulos circunscritos de igual base.

Base del k-ésimo rectángulo $\square$

Altura del k-ésimo rectángulo $\square$

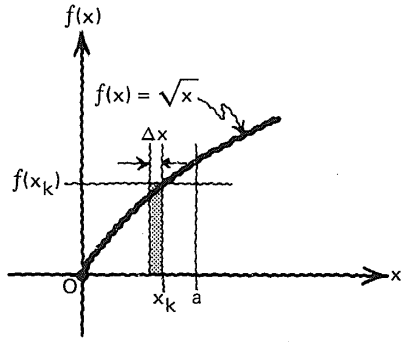


- $\frac{a}{n}$
- $f(x_k) = \sqrt{x_k} = \sqrt{\frac{ka}{n}}$

179

Área del k-ésimo rectángulo

$a_k =$ ____



• $\frac{a}{n}\sqrt{\frac{ka}{n}}$

180

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ ____

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}\sqrt{\frac{ka}{n}} = \frac{a\sqrt{a}}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

181

$$S(n) = \frac{a\sqrt{a}}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Área bajo la curva:

$S =$ ____

• $\lim_{n \to +\infty} S(n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a\sqrt{a}}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

182

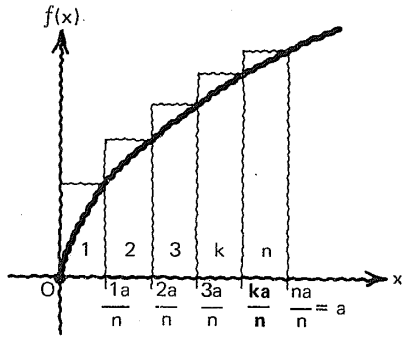
$$S = \lim_{n \to +\infty} \frac{a\sqrt{a}}{n\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \right)$$

Nos topamos con una dificultad:

no podemos expresar la sumatoria del segundo miembro en términos de n, es decir, no tenemos una expresión para la suma de las raíces cuadradas de los primeros n enteros positivos.

183

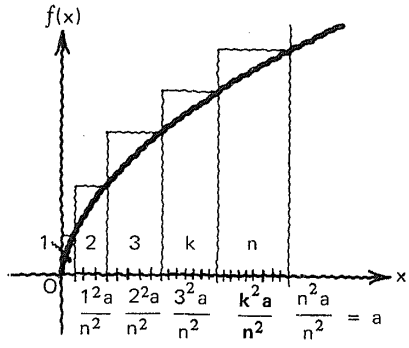
Vamos a resolver el problema en la siguiente forma:



Dividiremos el intervalo [0, a] en n subintervalos, pero no de igual longitud como lo hemos venido haciendo, sino de acuerdo con el criterio mostrado en el siguiente cuadro.

184

Estudiar con mucha atención este esquema de la "partición" del intervalo [0, a].



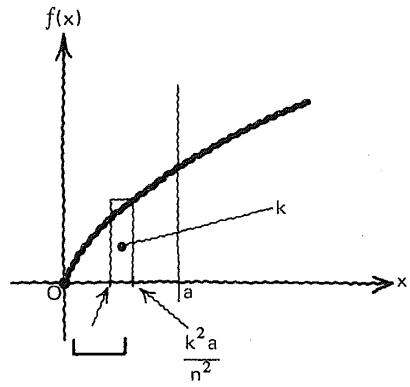
185

En esta forma:

la abscisa del **extremo derecho** del k-ésimo subintervalo es igual a:

$$\frac{k^2 a}{n^2}$$

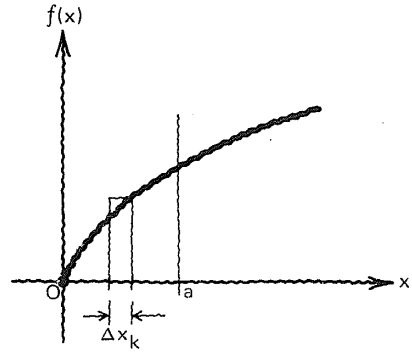
y la abscisa del **extremo izquierdo** del k-ésimo subintervalo es igual a:



- $\frac{(k-1)^2 a}{n^2}$
- $\frac{(k-1)^2 a}{n^2}$

186

Por lo tanto,
la longitud del k-ésimo subintervalo, es decir, la base del k-ésimo rectángulo será igual a:



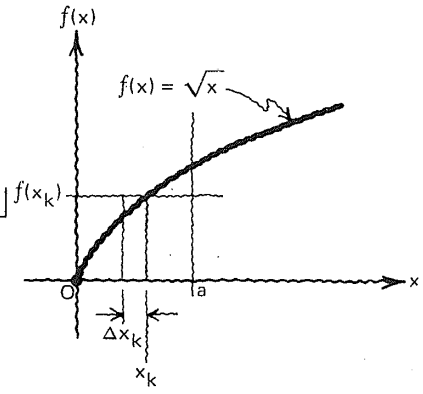
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$= \frac{k^2 a}{n^2} - \frac{(k-1)^2 a}{n^2}$

$= \frac{a}{n^2}[k^2 - (k-1)^2]$

187

La altura del k-ésimo rectángulo es:



$$f(x_k) = \sqrt{\frac{k^2 a}{n^2}} = \frac{k}{n}\sqrt{a}$$

188

Por lo tanto:

el área del k-ésimo rectángulo puede ser expresada así:

$a_k =$ ⌊_____⌋

$\frac{a}{n^2}[k^2 - (k-1)^2] \cdot \frac{k}{n}\sqrt{a}$

o bien:

$\frac{a\sqrt{a}}{n^3} k[k^2 - (k-1)^2]$

189

Suma de las áreas de los n rectángulos:

$S(n) =$ ⌊_____⌋

$\frac{a\sqrt{a}}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k[k^2 - (k-1)^2]$

190

$$S(n) = \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k[k^2 - (k-1)^2]$$

Intentemos expresar la sumatoria del segundo miembro en términos de n.

$$\sum_{k=1}^{n} k[k^2 - (k-1)^2] = \text{⌊\_\_\_\_\_⌋}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k[k^2 - (k-1)^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k[k^2 - (k^2 - 2k + 1)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k^2 - k^2 + 2k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(2k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - k = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(4n^2 + 3n - 1)}{6}$$

191

$$S(n) = \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \cdot \frac{n(4n^2 + 3n - 1)}{6}$$

$$S(n) = \frac{a\sqrt{a}}{6}\left[4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right]$$

Área bajo la curva:

$S = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$= \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

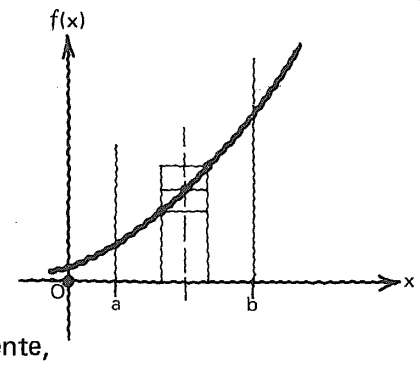
- $\lim_{n \to +\infty} s(n)$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a\sqrt{a}}{6}\left[4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right]$
- $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ o $\frac{2a^{3/2}}{3}$

192

Estamos dándonos cuenta de la flexibilidad del método.

193

Hemos visto que, ya sea que los rectángulos sean **circunscritos, inscritos**



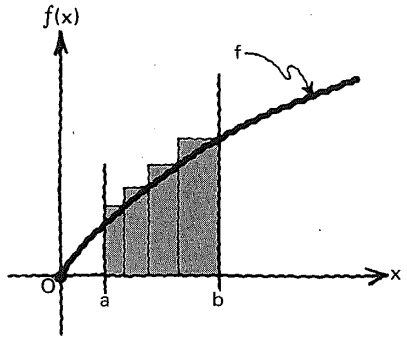
o construidos de manera que su altura sea la ordenada del punto medio del subintervalo correspondiente, la suma de sus áreas S(n) tiene como límite el área S bajo la curva cuando n (número de rectángulos) tiende a $+\infty$.

194

Ahora, debemos observar que los **subintervalos** pueden ser

de longitudes diferentes

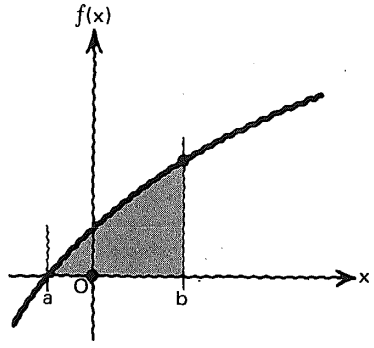
y de todas maneras, la suma de las áreas de los rectángulos que tienen como base dichos subintervalos tiende a un límite, que es el área bajo la curva f.



195

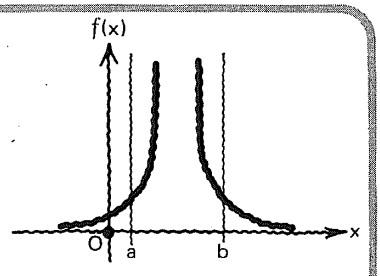
Hasta el momento, hemos hecho, aunque de manera implícita, dos consideraciones en relación con las **funciones** que limitan las figuras cuyas áreas hemos calculado:

1. deben ser **continuas** en el intervalo considerado;
2. deben ser **no negativas** para cualquier número del intervalo considerado.

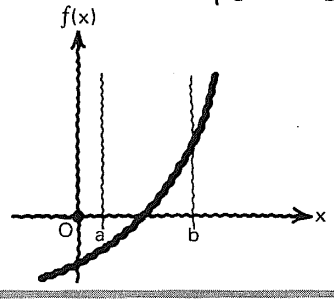


196

No nos han interesado en este estudio, funciones **discontinuas** como ésta...



...o **negativas** para al menos un número del intervalo considerado, como ésta



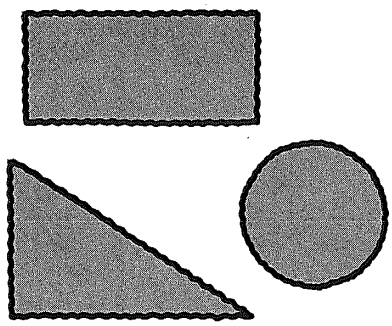
197

Revisaremos la
segunda restricción.

198

Hasta este momento
hemos aceptado la
definición de **área**
que considera a ésta como un

número real no negativo.



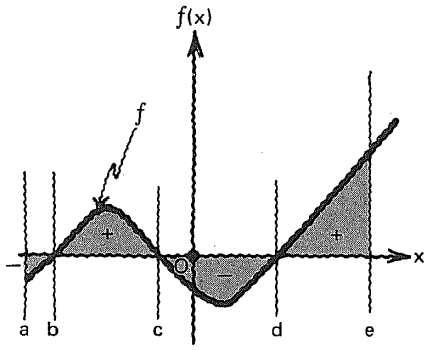
199

Vamos a reconsiderar el
asunto, definiendo el **área**
como un **número real**
cualquiera asignado a una
figura geométrica.

200

Diremos que:

- para los intervalos [b, c] y [d, e] el área limitada por la curva f y la recta $y = 0$ es **positiva** y que
- para los intervalos [a, b] y [c, d] el área limitada por f y la recta $y = 0$ es **negativa**



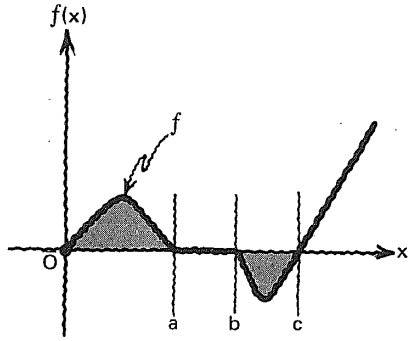
201

Por ejemplo:

El área limitada por f, y las rectas $x = 0$, $x = a$ y $y = 0$ es ⌊_____⌋

El área limitada por f, y las rectas $x = a$, $x = b$ y $y = 0$ es ⌊_____⌋

El área limitada por f, y las rectas $x = b$, $x = c$ y $y = 0$ es ⌊_____⌋

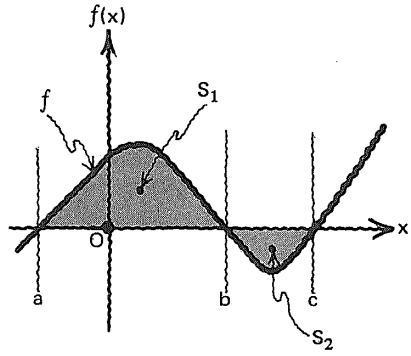


- positiva (> 0)
- nula ($= 0$)
- negativa (< 0)

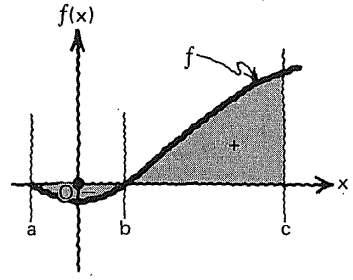
202

Si llamamos S_1 al área de la región limitada por f, $x = a$, $x = b$ y $y = 0$ y S_2 al área de la región limitada por f, $x = b$, $x = c$ y $y = 0$, el área S de la región limitada por f, $x = a$, $x = c$ y $y = 0$ será igual a la suma algebraica de S_1 y S_2, es decir:

$$S = S_1 + S_2$$



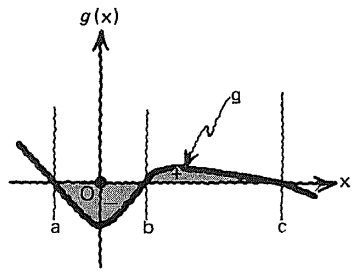
203



Intuitivamente, podemos asegurar que el área acotada por f, $x = a$, $x = c$ y $y = 0$, es

[ ]

positiva/negativa/nula



Asimismo, el área acotada por g, $x = a$, $x = c$ y $y = 0$, es

[ ]

positiva/negativa/nula

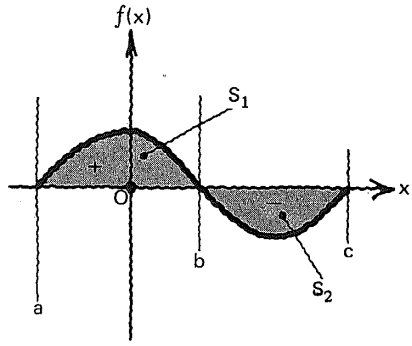
● positiva ● negativa

204

Si $|S_1| = |S_2|$

entonces

$S = S_1 + S_2 =$ [ ]



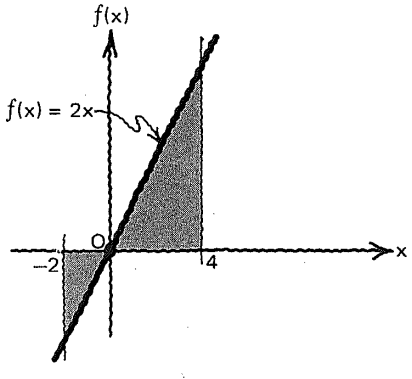
0

205

Por ejemplo: vamos a calcular el área acotada por la recta

$f(x) = 2x$

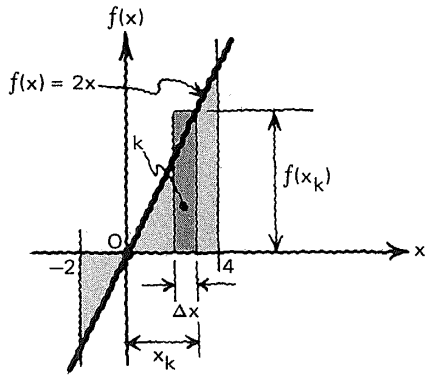
y las rectas $x = -2$, $x = 4$ y $y = 0$, utilizando **n rectángulos** de igual base y circunscritos en la porción de recta a la derecha de oy.



206

Base del k-ésimo rectángulo:

$\Delta x =$ [ ]



$$\frac{4-(-2)}{n} = \frac{6}{n}$$

207

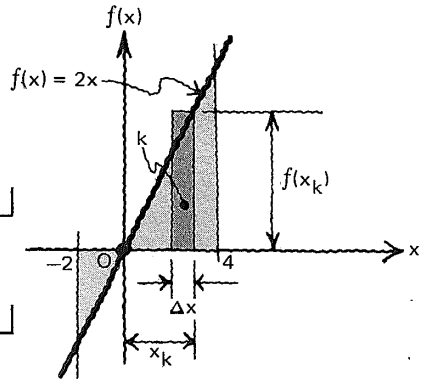
Atención.

Altura del k-ésimo rectángulo:

$f(x_k) =$ [ ]

puesto que

$x_k =$ [ ]



Atención.

- $f\left(\frac{6k}{n} - 2\right) = 2\left(\frac{6k}{n} - 2\right)$
- $\frac{6k}{n} + (-2) = \frac{6k}{n} - 2$

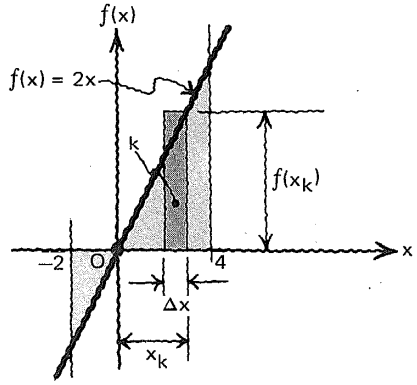
208

$\Delta x = \frac{6}{n}$

$f(x_k) = 2\left(\frac{6k}{n} - 2\right)$

Área del k-ésimo rectángulo:

$a_k =$ [ ]



$$\frac{12}{n}\left(\frac{6k}{n} - 2\right)$$

209

Suma de los n rectángulos:

$S(n) =$ ⌊ ⌋

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{12}{n}\left(\frac{6k}{n} - 2\right) = \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{6k}{n} - 2$$

210

$$S(n) = \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{6k}{n} - 2$$

Expresemos el segundo miembro en términos de n.

Expresión simplificada: ⌊ ⌋

$$\frac{12}{n}\left[\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2\right]$$

$$\frac{12}{n}\left[\frac{6n(n+1)}{2n} - 2n\right]$$

$$12 + \frac{36}{n}$$

211

$$S(n) = 12 + \frac{36}{n}$$

$S =$ ⌊ ⌋ $=$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

- $\lim_{n \to +\infty} s(n)$
- $\lim_{n \to +\infty} \left(12 + \frac{36}{n}\right)$
- $\lim_{n \to +\infty} \left(12 + \frac{36}{n}\right) = 12$

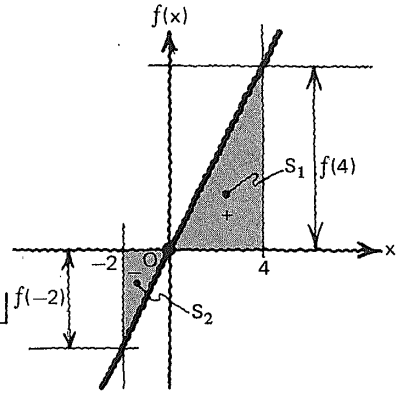
212

Geométricamente:

$S_1 =$ |_____|

$S_2 =$ |_____|

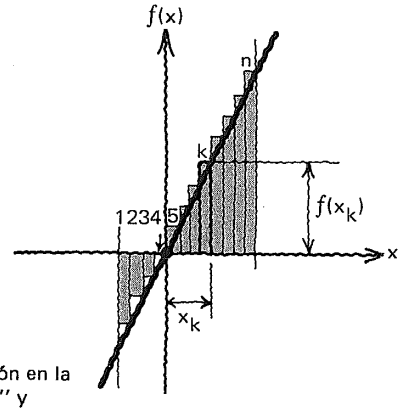
$S =$ |_____|



- $\frac{4f(4)}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = 16$
- $\frac{2|f(-2)|}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$
- $|S_1| - |S_2| = 16 - 4 = 12$

213

Hemos obtenido un resultado correcto a pesar de que, si observamos con atención, algunos de los rectángulos considerados están "circunscritos" * en la recta f, y algunos de ellos están "inscritos".*



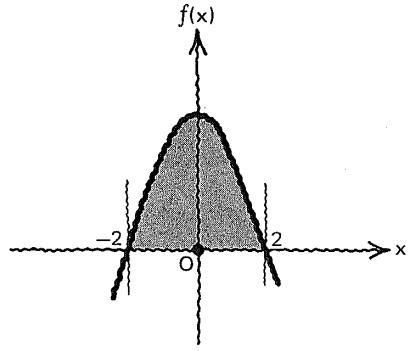
* Desde luego, basamos nuestra observación en la noción intuitiva que tenemos de "inscrito" y "circunscrito", puesto que no hemos definido estos términos en forma precisa.

214

Calculemos el área acotada por la curva

$f(x) = 4 - x^2$

y las rectas $x = -2$, $x = 2$ y $y = 0$; utilizando rectángulos de igual base, e inscritos en la porción de la curva a la derecha de oy.



215

Base del k-ésimo rectángulo:

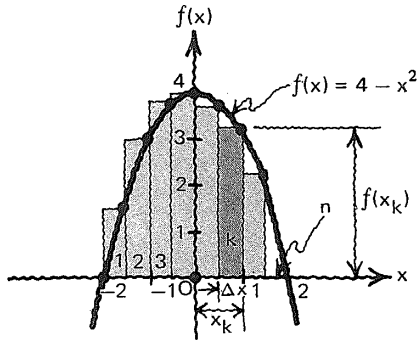
$\Delta x =$ [ ]

Altura del k-ésimo rectángulo:

$f(x_k) =$ [ ]

puesto que

$x_k =$ [ ]

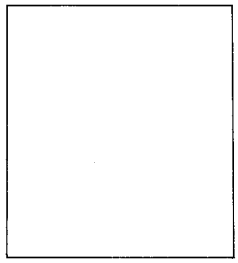


- $\frac{2 - (-2)}{n} = \frac{4}{n}$
- $f\left(\frac{4k}{n} - 2\right) = 4 - \left(\frac{4k}{n} - 2\right)^2$
- $\frac{4k}{2} - 2$

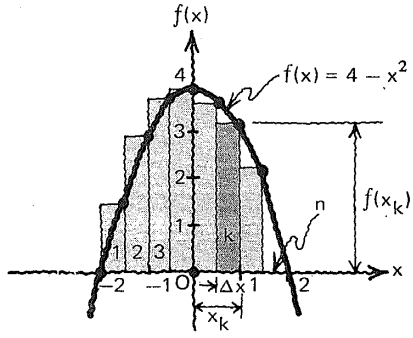
216

Área del k-ésimo rectángulo

$a_k =$ [ ]



[ ]



Expresión simplificada en la forma: $c \cdot \phi(k)$ en que c es independiente de k.

- $\frac{4}{n}\left[4 - \left(\frac{4k}{n} - 2\right)^2\right]$

  $\frac{4}{n}\left[4 - \left(\frac{16k^2}{n^2} - \frac{16k}{n} + 4\right)\right]$

  $\frac{4}{n}\left[\cancel{4} - \frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} - \cancel{4}\right]$

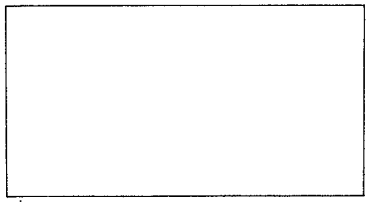
  $\frac{4}{n}\left[\frac{16k}{n} - \frac{16k^2}{n^2}\right]$
- $\frac{64}{n^2}\left(k - \frac{k^2}{n}\right)$

217

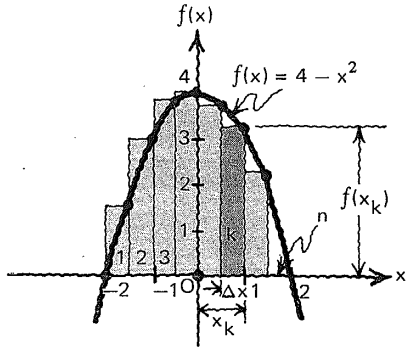
$\acute{a}_k = \frac{64}{n^2}\left(k - \frac{k^2}{n}\right)$

Suma de las áreas de los n rectángulos:

[ ]



[ ]



Expresión simplificada en términos de n

- $S(n) = \frac{64}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{k^2}{n}$

  $= \frac{64}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]$

  $= \frac{64}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}\right]$
- $S(n) = \frac{32}{3} - \frac{32}{3n^2}$

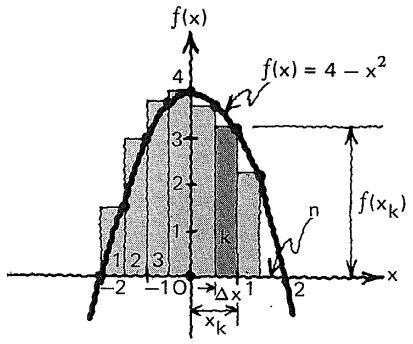
218

$$S(n) = \frac{32}{3} - \frac{32}{3n^2}$$

$S =$ ____

$=$ ____

$=$ ____



- $\lim_{n\to+\infty} S(n)$
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{3n^2}\right)$
- $\frac{32}{3}$

8.1.6.1

Práctica adicional de determinación del área acotada por una cierta función, dos rectas verticales y el eje ox, pudiendo la función asumir valores negativos, para todos o algunos números del intervalo considerado, si se considera necesario.

8.1.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* cómo funciona el método de agotamiento estudiado para el cálculo de áreas, aun cuando los subintervalos que sirven de base a los rectángulos sean de diferente longitud;
- *explicar* cómo al área de una figura geométrica plana puede asignársele un número real cualquiera (positivo, negativo o cero);
- *calcular* por medio del método de agotamiento, áreas acotadas por funciones que pueden asumir valores negativos para ciertos números del intervalo de interés;
- *calcular* áreas acotadas por el método de agotamiento, considerando rectángulos que son inscritos para ciertos subintervalos y circunscritos para otros.

1.7

Suma de Riemann

219

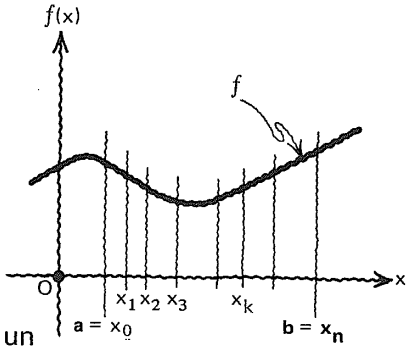
Hemos visto cómo nuestro **método de agotamiento** para cálculo de áreas acotadas funciona:

- con rectángulos circunscritos, inscritos o "interscritos"
- con rectángulos de igual base o de bases diferentes
- con rectángulos inscritos para ciertas porciones del intervalo considerado y circunscritos para otras
- con funciones que pueden asumir valores negativos en ciertas porciones del intervalo considerado, si redefinimos el área como un número real cualquiera.

220

Llevemos el asunto a sus últimas consecuencias y establezcámoslo de manera formal.

221



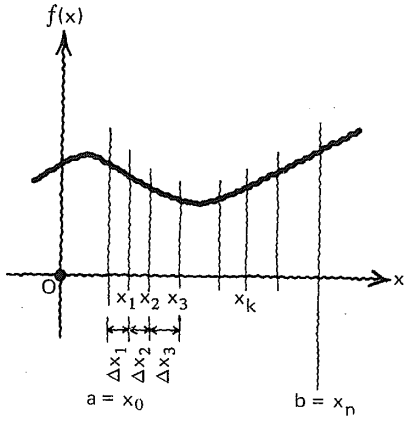
Sea f una **función continua** en un intervalo [a, b].

Sea $\Delta = \{ a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_k, \ldots x_n = b \}$

una partición de n subintervalos del intervalo [a, b].

222

Sea
- $\Delta x_1 = x_1 - x_0$
- $\Delta x_2 = x_2 - x_1$
- $\Delta x_3 =$ ____
- $\Delta x_k =$ ____
- $\Delta x_n =$ ____



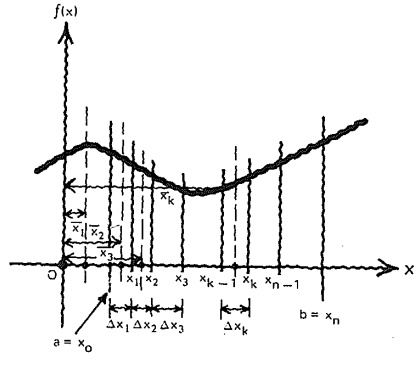
$x_3 - x_2$

$x_k - x_{k-1}$

$x_n - x_{n-1}$

223

Sea
- $\overline{x}_1$ un número cualquiera del subintervalo Δx_1 (no necesariamente un extremo o su punto medio)
- $\overline{x}_2$ un número cualquiera del subintervalo Δx_2
- $\overline{x}_k$ un número cualquiera del subintervalo Δx_k



224

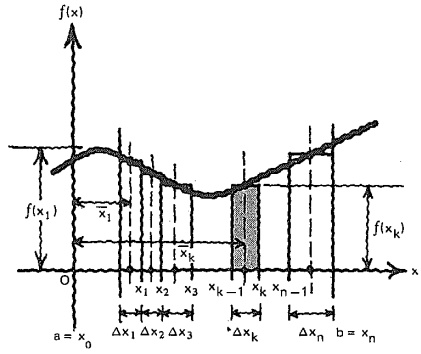
Sea $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$

la suma de los productos

$f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1$, $f(\bar{x}_2)\,\Delta x_2$, etc.

y llamémosle

suma de Riemann

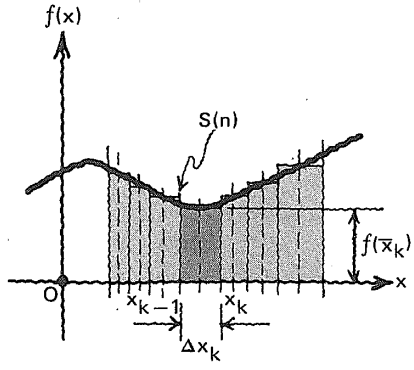


225

Esta suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = S(n)$$

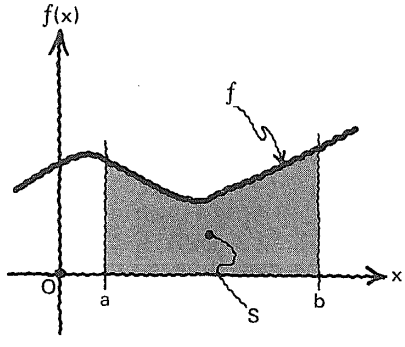
representa geométricamente la suma de las áreas de los rectángulos que tienen como base Δx_k y como altura $f(\bar{x}_k)$.



226

Y el **límite** de esta **suma de Riemann,** si existe, representa geométricamente el área de la región limitada por la curva f, las rectas $x = a$, $x = b$ y $y = 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = S$$



8.1.7.1

Práctica de cálculo de
sumas de Riemann, dados:

- una función f continua en un intervalo dado [a, b];
- el número n de subintervalos y el criterio de la participación del intervalo [a, b],

si se considera necesario.

8.1.7.2

Práctica de
cálculo de áreas de regiones
limitadas por una curva, por dos
rectas verticales y por
el eje ox, aplicando explícitamente
el concepto de
límite de suma de Riemann,
si se considera necesario.

8.1.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* los conceptos de:
  - —suma de Riemann y
  - —límite de suma de Riemann

  dando su interpretación geométrica;
- *calcular* una suma de Riemann dados: una función f continua en un intervalo [a, b], el número n de subintervalos y el criterio de la participación del intervalo [a, b];
- *aplicar* el concepto de límite de suma de Riemann al cálculo de áreas de regiones limitadas por una curva, un par de rectas verticales y el eje ox.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RIC KC 100